

# **Ein neuer Typus pulsationsfreier linearer Schlauchpumpen**

Dissertation zur Erlangung des  
akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der Fakultät für Maschinenbau  
der Technischen Universität Ilmenau

von Dipl.-Ing. Konrad Leopold Hoffmeier  
(geb. 25.05.1977)

1. Gutachter: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. med. habil. Hartmut Witte
2. Gutachter: apl. Prof. Dr.-Ing. habil. Lena Zentner
3. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Karl-Heinz-Feller

Tag der Einreichung: 21.04.2016

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 27.10.2016

## Kurzfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Modells für pulsationsfrei arbeitende, lineare Schlauchpumpen sowie der Nachweis der praktischen Realisierbarkeit derartiger Pumpen.

Schlauchpumpen sind eine spezielle Form von Pumpen, deren Arbeitsraum aus einem flexiblen Schlauch besteht, in welchem der Fluidtransport durch eine mechanisch aufgeprägte Verformung des Schlauchquerschnittes „erzwungen“ wird. Diese Funktionsweise ist bionisch inspiriert von dem aus der Natur bekannten Prinzip der propulsiven Peristaltik in Hohlorganen, weswegen Schlauchpumpen umgangssprachlich auch als Peristaltikpumpen bezeichnet werden.

Der entscheidende Vorteil von Schlauchpumpen gegenüber allen anderen Pumpen besteht darin, dass das zu pumpende Fluid ausschließlich mit der Innenseite des Schlauches in Kontakt kommt, so dass eine Kreuzkontamination praktisch ausgeschlossen ist. Insbesondere aus diesem Grund kommen in der Medizintechnik und der Biotechnologie überwiegend Schlauchpumpen zum Einsatz. Neben einer Vielzahl weiterer Vorteile besitzen alle bisher verfügbaren Schlauchpumpen jedoch den Nachteil, dass der von ihnen erzeugte Volumenstrom stark pulsiert. Deshalb eignen sich Schlauchpumpen nur bedingt für präzise Dosieraufgaben. Auch können sich die durch die Pulsation hervorgerufenen Druckschwankungen störend auf ein angeschlossenes fluidisches System auswirken.

Den theoretischen Ansatz für die pulsationsfreie Funktionsweise linearer Schlauchpumpen liefert ein von Feller & Schimmelpfennig (2010) vorgestelltes Konzept, welches die zyklischen Volumenänderungen von fünf in Reihe geschalteten Arbeitsräumen beschreibt. Eine in dieser Arbeit vorgenommene Analyse zeigt, dass für die Umsetzung dieses Konzeptes unendlich große Beschleunigungen der die Arbeitsräume bildenden mechanischen Komponenten und des in den Arbeitsräumen enthaltenen Fluides erforderlich wären. Da derartige Beschleunigungen weder realisierbar noch praktikabel sind, wurde unter Berücksichtigung der kinematischer Aspekte wie „Stoß“ und „Ruck“ ein neues Konzept in Form eines parametrischen Pumpenmodells entwickelt, mit welchem sich die zum pulsationsfreien Betrieb der Pumpe benötigten zeitabhängigen Stößelbewegungen berechnen lassen. Für den praktischen Nachweis der Realisierbarkeit pulsationsfreier linearer Schlauchpumpen wurde ein technischer Demonstrator entwickelt. Die Versuche mit dem Demonstrator zeigten, dass aufgrund des viskoelastischen Materialverhaltens des Pumpschlauches und der endlichen Fertigungsgenauigkeit der verwendeten Komponenten eine gewisse Restpulsation verbleibt. Insbesondere bei kleinen Antriebsdrehzahlen ist diese zum Teil um mehr als eine Größenordnung geringer, als die Pulsation von zwei getesteten, kommerziell verfügbaren Schlauchrollenpumpen.

## **Abstract**

Subject of this work is the development of a theoretical model for pulsation-free linear peristaltic pumps as well as the proof of the technical feasibility of such pumps.

In peristaltic pumps the working chamber consists of a flexible tube or hose, in which the fluid transport is "enforced" by a mechanically imprinted deformation of the tube cross section. This working principle is inspired by the biological process of peristalsis, a cyclic contraction of smooth muscles in hollow organs that is for example used for the propulsion of food in the intestinal tract.

The key advantages of peristaltic pumps are cleanliness and safety. As the fluid is enclosed by the tubing neither the fluid nor the mechanical parts can get contaminated. For this reason, in medical technology and biotechnology peristaltic pumps are predominantly used. Besides many other advantages peristaltic pumps have the specific disadvantage that the produced flow pulsates strongly. This pulsation impairs the use of peristaltic pumps for metering tasks and causes pressure fluctuations that can interfere with an attached fluidic system.

A initial theoretical approach for pulsation-free linear peristaltic pumps was presented by Feller & Schimmelpfennig (2010). It describes the volume change over time within five subsequently arranged pump chambers. In this thesis the approach by Feller & Schimmelpfennig was analyzed. It revealed that this approach is technically not feasible because it would require infinitely large acceleration of the mechanical parts used for the pumping chambers. Addressing this fundamental flaw, an enhanced theoretical model was developed that involves the first ("speed") and the second ("acceleration") derivative of the volume change over time to calculate the required volume change over time such that the occurring "acceleration" is limited to finite values.

For model validation a prototype of a pulsation-free linear peristaltic pump was developed. For this prototype it was found, that a "residual pulsation" remains as a result of the viscoelastic material behavior of the pump tube and of the limited manufacturing precision of the used components. Especially at low drive speeds, this residual pulsation was by more than one order of magnitude lower than the pulsation of two tested roller pumps.

# Inhaltsverzeichnis

<b>KURZFASSUNG .....</b>	<b>II</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>III</b>
<b>INHALTSVERZEICHNIS .....</b>	<b>IV</b>
<b>ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS .....</b>	<b>VI</b>
<b>PARAMETERVERZEICHNIS .....</b>	<b>VII</b>
<b>DANKSAGUNG .....</b>	<b>IX</b>
<b>1 EINLEITUNG .....</b>	<b>10</b>
<b>2 STAND DER WISSENSCHAFT UND TECHNIK .....</b>	<b>12</b>
2.1 Einordnung der Schlauchpumpen .....	12
2.1.1 Hydrodynamische Pumpen .....	12
2.1.2 Hydrostatische Pumpen .....	12
2.1.3 Schlauchpumpen .....	14
2.2 Pulsation .....	16
2.2.1 Definition .....	16
2.2.2 Maßnahmen zur Pulsationsminderung .....	18
2.2.3 Spezialfall lineare Schlauchpumpe .....	23
<b>3 KRITISCHE ANALYSE VORHANDENER KONZEPTE .....</b>	<b>28</b>
<b>4 MODELLBILDUNG .....</b>	<b>32</b>
4.1 Betrachtung der pumpeninternen geometrischen Teilvolumenströme .....	32
4.1.1 Auswahl der Übergangsfunktionen .....	35
4.1.2 Parametrisierung des Phasenplanes .....	37
4.1.3 Die Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$ .....	44
4.1.4 Kammergrößenverteilung .....	45
4.1.5 Die Teilübertragungsfunktionen $\ddot{f}_i(x)$ .....	48
4.2 Der Schlauch als Pumpkammer .....	52
4.2.1 Okklusionsmodell .....	52
4.2.2 Kammersteuerung .....	56
4.2.3 Beispiel zur Berechnung der erforderlichen Stößelbewegungen .....	59
<b>5 EXPERIMENTALAUFBAU ZUR VALIDIERUNG DES PUMPENMODELLS .....</b>	<b>62</b>
5.1 Pumpschlauchcharakteristik .....	62
5.2 Pumpenprototyp .....	65
5.2.1 Schlauchaufnahme .....	66
5.2.2 Stößelbaugruppen .....	66
5.2.3 Antrieb .....	68
5.3 Messaufbau .....	72
5.4 Steuerkurvengenerierung und -optimierung .....	73
5.4.1 Kammercharakterisierung .....	74
5.4.2 Steuerkurvenberechnung .....	76
5.4.3 Steuerkurvenoptimierung .....	77
5.5 Kurvenscheibenauslegung .....	80
5.5.1 Messung der tatsächlichen Stößelbewegung .....	80
5.5.2 Kurvenscheibenberechnung .....	83
5.6 Pumpencharakterisierung .....	84
<b>6 ERGEBNISSE DER VALIDIERUNG DES PUMPENMODELLS .....</b>	<b>87</b>
6.1 Überprüfung des Okklusionsmodells .....	87
6.2 Pumpenprototyp .....	90
6.2.1 Charakterisierung der Kammern .....	90
6.2.2 Steuerkurvenoptimierung .....	93
6.2.3 Nockenformableitung .....	96

6.3	Pumpencharakterisierung.....	100
6.3.1	Vergleich des Prototyps mit gängigen Schlauchrollenpumpen .....	100
6.3.2	Gegendruckabhängigkeit .....	102
6.3.3	Gegenläufige Förderrichtung .....	103
6.3.4	Massenflussverlauf .....	104
6.3.5	Einfluss der Nockenwellendrehzahl auf den Massenfluss.....	106
6.3.6	Wiederholgenauigkeit.....	107
<b>7</b>	<b>DISKUSSION .....</b>	<b>113</b>
7.1	Schlauchcharakteristik .....	114
7.2	Prototyp einer pulsationsarmen linearen Schlauchpumpe .....	115
7.2.1	Berechnete Steuerkurven .....	116
7.2.2	Steuerkurvenoptimierung.....	117
7.2.3	Aufgezeichnete Antriebspositionen.....	118
7.2.4	Vergleich des Prototyps mit gebräuchlichen Schlauchrollenpumpen .....	119
7.2.5	Gegendruckabhängigkeit .....	121
7.2.6	Förderrichtungsumkehr .....	122
7.2.7	Unregelmäßigkeit im Massenflussverlauf .....	122
7.2.8	Positioniergenauigkeit der Schlauchaufnahme.....	123
7.2.9	Übertragbarkeit der Steuerkurven auf Schläuche desselben Typs.....	124
7.2.10	Übertragbarkeit der Steuerkurven auf einen anderen Schlauchtyp .....	124
<b>8</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK .....</b>	<b>126</b>
8.1	Zusammenfassung .....	126
8.2	Ansätze zur weiterführenden Forschung .....	127
	<b>LITERATURVERZEICHNIS .....</b>	<b>129</b>
	<b>ANHANG .....</b>	<b>132</b>
A1	Berechnung von $f_i(x)$ .....	132
A2	Berechnung von $\dot{f}_i(x)$ .....	134
A3	Stetigkeit der Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$ der Kammer 1.....	136
A4	Die Teilübertragungsfunktionen $\dot{f}_i(x)$ .....	139
A5	Die Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$ .....	141
A6	Berechnung von $q_1$ und $q_2$ .....	143
A7	Berechnung des maximalen Arbeitsvolumens von Kammer 1 und 2 .....	146
A8	Die Teilübertragungsfunktionen $\ddot{f}_i(x)$ und deren Extremwerte .....	149
A9	Übersicht der Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$ , $\dot{f}_i(x)$ und $\ddot{f}_i(x)$ .....	154
A10	Optimum des Parameters $s_2$ .....	160
A11	Herleitung des vom Stößelweg abhängigen Kammervolumens .....	161
A12	Berechnung $C_1$ von Kammer 5 .....	163
A13	Stößelhubberechnung für das Beispiel in Kapitel 4.2.3 .....	164
A14	Fehler der Verdrängungsmessung in Folge des Auftriebs .....	179
A15	Zur Kurvenscheibenberechnung genutzte Formeln .....	181

## **Abkürzungsverzeichnis**

AK	Arbeitskurve
CAN	Controller Area Network
FK	Führungskurve
k <sub>G</sub>	Grundkreis
PEEK	Polyetheretherketon
PTFE	Polytetrafluorethylen
PVC	Polyvinylchlorid
TÜF	Teilübertragungsfunktion

## Parameterverzeichnis

$A$	Flächenquerschnitt
$B$	Rollenmittelpunkt des Eingriffsgliedes
$b$	Breite der Anlagefläche des Schlauches
$C_i$	Integrationskonstante
$D_0$	Kurvenscheibendrehpunkt
$d$	Durchmesser
$e$	Abstand zwischen Stößel und Platte
$F$	Kraft
$f$	Frequenz
$f_i(x)$	normierte Teilübertragungsfunktion
$f(z)$	normierte symmetrische Übertragungsfunktion
$h$	Stößelhub
$i$	Index der Teilübertragungsfunktionen
$K_0, K_1$	Konstanten
$K$	Pumpkammerindex
$k$	Anzahl identischer Arbeitsräume
$L$	Stößellänge
$l$	vertikale lichte Höhe des Schlauchinnenquerschnitts
$m$	Masse
$N$	Anzahl der Teilvolumenströme
$n$	Stichprobenumfang
$P$	Phasenindex gemäß Phasenplan
$p$	Irrtumswahrscheinlichkeit
$Q$	Volumenstrom allgemein
$q_K$	im Phasenplan definierte Teilvolumenströme
$r$	Radius
$s_P, s_{P,i}$	Phasenanteil einer Übergangsfunktion
$T$	Periodendauer
$t$	Zeit
$V$	Volumen

$\dot{V}$	Volumenstrom
$v$	Geschwindigkeit
$W$	Vorfaktor
$x$	Funktionsargument im Phasenplan
$y$	Ortskoordinate Stößelweg
$z$	Funktionsargument normierter symmetrischer Übertragungsfunktionen
$\alpha$	Kippwinkel Traverse
$\delta$	Ungleichmäßigkeit
$\varepsilon$	normierter Stößelweg
$\xi$	Faktor zur Normierung auf Kammer mit dem größten Verhältnis zwischen verfügbarem und benötigtem Volumen
$\varphi$	Drehwinkel
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit



## **Danksagung**

Ich danke hiermit allen, die mich direkt und indirekt bei der Erstellung meiner Arbeit unterstützt haben.

Insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Karl-Heinz Feller für die Betreuung meiner Doktorarbeit und die eingeräumte Freiheit bei der Bearbeitung meines Themas.

Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr. med. habil. Hartmut Witte danke ich für die herzliche und unkomplizierte Betreuung meiner Arbeit, sowie die aufmunternden Worte „schreib!“ welche den „Startschuss“ für die Verfassung dieses Manuskriptes bildeten.

Großer Dank gilt auch all meinen Kollegen, welche mich über die Jahre ertragen und nach Kräften unterstützt haben. Besonders erwähnen möchte ich M.Sc. Bernd Büttner und M.Sc. Dirk Hoffmann welche mir nicht nur als Freunde, sondern auch mit fachlicher Diskussion und hilfreichen Hinweisen zur Seite standen. In diesem Zusammenhang darf natürlich M.Sc. Astrid Pflieger nicht unerwähnt bleiben, welche mich als „Meisterin des ZEN“ in der Handhabung der Software ZEN 2012 unterwiesen hat.

Ebenfalls danken möchte ich den Herren Ronald Schmidt und Mathias Rohde vom Fraunhofer-Institut für Angewandte Optik und Feinmechanik IOF für die Herstellung und Vermessung der Nocken meines Pumpenprototyps.

Nicht zuletzt und insbesondere danke ich meiner Frau Andrea Hoffmeier dafür, dass sie mir in allen familiären Belangen stets den Rücken frei gehalten hat. Ohne ihre uneingeschränkte Unterstützung und unglaubliche Geduld wäre diese Arbeit nicht zu Stande gekommen.

## 1 Einleitung

Pumpen werden in unterschiedlichen Anwendungsbereichen zur Förderung oder Druckerhöhung von Fluiden benötigt. Die vorkommenden Wirkmechanismen und Bauformen sind dabei ebenso zahlreich und vielfältig wie die Einsatzgebiete der Pumpen. Eine spezielle Form von Pumpen stellen die sogenannten Schlauchpumpen dar, deren Arbeitsraum in einem flexiblen Schlauch definiert wird. Aufgrund der Ähnlichkeit zu dem von Lebewesen bekannten Prinzip der propulsiven Peristaltik werden Schlauchpumpen auch als „Peristaltikpumpen“ und das Zusammendrücken des Schlauches, in Anlehnung an den Verschluss von Hohlorganen, als „Okklusion“ bezeichnet.

Schlauchpumpen benötigen für ihre Funktion weder Dichtungen noch Ventile und arbeiten dadurch grundsätzlich „leckfrei“ (Dhumal & Kadam 2012). Der entscheidende Vorteil ist ihre „saubere“ Handhabbarkeit. Während andere Pumpen aufwändig gereinigt werden müssen, genügt es, bei einer Schlauchpumpe den Schlauch auszutauschen. Eine Kreuzkontamination wird damit praktisch ausgeschlossen und die Pumpe ist sofort wieder einsatzbereit (Berg & Dallas 2015). Typische Anwendungen sind die Dosierung von Medikamenten, Lebensmitteln und Chemikalien sowie die Perfusion von Zellkulturen, aber auch die Förderung aggressiver chemischer Substanzen oder kontaminierter (Klär-)Schlämme (Dhumal & Kadam 2012). Im Vergleich zu anderen Pumpen arbeiten Schlauchpumpen mit geringem Druck, wodurch sie sich ideal zum Pumpen schubspannungsempfindlicher Fluide wie Blut, Zellsuspensionen oder reaktiver Flüssigkeiten eignen (Ejsing 2010; Berg & Dallas 2015). Eine besondere Bedeutung kommt den Schlauchpumpen in der Medizintechnik zu. Die erste Veröffentlichung über die Verwendung einer, damals noch von Hand betriebenen, Schlauchpumpe zur Bluttransfusion erfolgte durch Michael DeBakey (1934). Seitdem finden die Schlauchpumpen vielfältigen Einsatz in der Transfusionsmedizin und der extrakorporalen Zirkulation.

Neben ihren vielfältigen Vorteilen haben Schlauchpumpen den Nachteil, dass sie einen pulsierenden Volumenstrom erzeugen (Vetter 2006). Für die Förderung von Fluid ohne besondere Anforderungen spielt die Pulsation meist eine untergeordnete Rolle. Jedoch können sich auch in solchen Fällen die durch die Volumenstromschwankungen hervorgerufenen Druckschwankungen störend auf das angeschlossene fluidische System auswirken (Vetter 2006). Kritisch ist die Pulsation für alle Prozesse, welche eine konstante beziehungsweise zeitlich definierte Dosierung erfordern, da infolge der Pulsation Dosierfehler auftreten (Schnedler 1973).

Maßnahmen zur Pulsationsminderung lassen sich entsprechend ihres Ansatzes in der Wirkkette in primäre und sekundäre Maßnahmen unterscheiden. Primäre Maßnahmen setzen direkt bei

der Entstehung der Pulsation in der Pumpe an. Sekundäre Maßnahmen bestehen aus den pulsierenden Pumpen nachgeschalteten Pulsationsdämpfern, welche sowohl passiv als auch aktiv wirken können. Passive Pulsationsdämpfer lassen sich auf einen zuvor bekannten Betriebspunkt optimal auslegen (Kiesbauer 1991; Kurr 1994). Sie eignen sich daher für Pumpen, welche mit konstanter Drehzahl betrieben werden. Bei variabler Pumpendrehzahl sind aktive Pulsationsdämpfer erforderlich, da mit passiven Dämpfern keine über den gesamten Drehzahlbereich konstante Pulsationsminderung erreicht wird (Kiesbauer 1991). Allen Sekundärmaßnahmen gemein ist, dass sie zusätzlichen Bauraum im fluidischen System beanspruchen und eine zusätzliche potenzielle Fehlerquelle hinsichtlich der Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems darstellen. Sekundärmaßnahmen sollten erst dann erfolgen, wenn alle Möglichkeiten der Primärmaßnahmen ausgeschöpft sind.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit besteht in der primären Pulsationsminderung von linearen Schlauchpumpen. Für die theoretische Betrachtung einer solchen Pumpe werden die in dieser Arbeit entwickelten Modelle zur Beschreibung der geometrischen Volumenströme in der Pumpe und zur Beschreibung der Stößelweg-abhängigen Volumenänderung der Arbeitsräume miteinander kombiniert. Die praktische Funktionstüchtigkeit der durch das Modell beschriebenen pulsationsfreien linearen Schlauchpumpe wird mit einem technischen Demonstrator nachgewiesen und abschließend die Übertragbarkeit dieses Pumpenkonzepts in eine praxistaugliche Form der Pumpe untersucht.

## **2 Stand der Wissenschaft und Technik**

### **2.1 Einordnung der Schlauchpumpen**

Bei einer Pumpe handelt es sich um eine Maschine, welche durch Energiewandlung die Energie ihres Antriebs auf ein Fluid überträgt. Entsprechend ihres zugrundeliegenden Funktionsprinzips lassen sich Pumpen in hydrodynamische und hydrostatische Pumpen unterteilen. Die Bauarten der Pumpen sind dabei so vielfältig wie ihre Anwendungen.

#### **2.1.1 Hydrodynamische Pumpen**

Hydrodynamische Pumpen sind Strömungspumpen, welche mit Hilfe eines rotierenden Bauteils, dem Pumpenrad, Energie auf ein Fluid übertragen und dadurch zunächst dessen Druck und Geschwindigkeit erhöhen (Vetter 2006; Wagner 2009). Durch anschließende Verzögerung des Fluids in der Pumpe, wird ein Großteil von dessen kinetischer Energie in hydraulischen Druck umgewandelt (Gülich 2010). Strömungspumpen wirken daher als eine Art „hydraulische Spannungsquelle“. Sie erzeugen einen hydraulischen Druck, und der Fluss stellt sich in Abhängigkeit des angeschlossenen Strömungswiderstandes ein (Parker 1994). Aus diesem Grund werden Strömungspumpen überwiegend in einem festen Arbeitspunkt betrieben, in welchem sie den Druck für die geforderte Flussrate in einem System bereitstellen. Problematisch ist dabei jedoch die Anfälligkeit der erzeugten Flussrate gegenüber Veränderungen des fluidischen Widerstandes, zum Beispiel durch die Viskositätsänderung des Fluids in Folge einer Temperaturänderung. Flüssigkeiten von hoher Viskosität oder mit einem hohen Gasanteil lassen sich schlecht mit den üblichen Strömungspumpen fördern. So können sich zum Beispiel mitgeführte Gasblasen auf der Saugseite (Pumpeneingang) im Bereich der Nabe des Pumpenrades sammeln, bis sie die nachströmende Flüssigkeit vollständig blockieren und die Pumpe aufhört zu arbeiten (Parker 1994).

Strömungspumpen sind in der Regel nicht selbstansaugend und müssen vor dem Einschalten mit Fluid befüllt werden (Gülich 2010).

#### **2.1.2 Hydrostatische Pumpen**

Hydrostatische Pumpen werden auch als Verdrängerpumpen oder volumetrische Pumpen bezeichnet. Ihre Wirkungsweise beruht auf der zyklischen Größenänderung eines mit Fluid gefüllten Arbeitsraumes. Ihr Vorteil gegenüber den hydrodynamischen Pumpen besteht darin, dass der erzeugte Volumenstrom nahezu unabhängig von dem am Pumpenausgang anliegenden Gegendruck ist (Parker 1994). Für schubspannungsempfindliche Fluide sollten ausschließlich

Verdrängerpumpen zum Einsatz kommen, da in Strömungspumpen lokal große Scherkräfte auftreten können (Parker 1994).

Verdrängerpumpen sind in der Lage, Flüssigkeiten und Schlämme in einem weiten Viskositätsbereich zu fördern. Von den meisten Verdrängerpumpen werden auch Schäume und Flüssigkeiten mit über 50 % Gasanteil zuverlässig transportiert. Alle Verdrängerpumpen sind grundsätzlich selbstansaugend und trockenlauffähig. Da sie auch Gase transportieren, reicht der dabei am Pumpeneingang erzeugte Unterdruck für gewöhnlich aus, um Flüssigkeit anzusaugen (Parker 1994).

Problematisch ist es, wenn der Pumpenausgang verschlossen wird, zum Beispiel aufgrund einer verstopften Leitung. Da die Pumpe weiterhin Volumen fördert und Flüssigkeiten nahezu inkompressibel sind, erreicht der resultierende Druck innerhalb kürzester Zeit ein Vielfaches des ursprünglichen Arbeitsdrucks (Parker 1994). Um in einem solchen Fall die Beschädigung der Pumpe oder des angeschlossenen Systems zu vermeiden ist es sinnvoll, die Antriebsleistung zu begrenzen und vor dem Pumpenausgang ein Überdruckventil zu installieren. Im Gegensatz dazu können Strömungspumpen, zumindest kurzzeitig, auch gegen einen verschlossenen Ausgang fördern, da der maximal erzeugbare Druck auf den Wert der sogenannten Nullförderhöhe begrenzt ist (Gülich 2010).

Verdrängerpumpen kommen dort zum Einsatz, wo eine genaue Dosierung erforderlich ist, beziehungsweise definierte Flussraten bei wechselnden Fluidparametern und Umgebungsbedingungen (Viskosität, Gasanteil, Feststoffanteil, Gegendruck, etc.) aufrecht erhalten werden müssen. Aufgrund der erreichbaren hohen Drücke werden sie außerdem zur Druckerzeugung in hydrostatischen Anlagen (Hydraulik) eingesetzt.

Anhand der Bewegung, der an der Bildung des Arbeitsraumes beteiligten „Verdrängerelemente“, lassen sich Verdrängerpumpen in rotierende und oszillierende Pumpen unterscheiden (Ivantysyn & Ivantysynova 1993).

### Rotierende Verdrängerpumpen

In den rotierenden Verdrängerpumpen wird der Arbeitsraum zwischen Gehäuse und rotierendem Verdrängungskörper oder zwischen ineinandergreifenden Verdrängungskörpern gebildet und innerhalb eines Arbeitszyklus vom Pumpenein- zum Pumpenausgang bewegt (Ivantysyn & Ivantysynova 1993). Beispiele hierfür sind Zahnrad-, Kreiskolben-, Impeller- oder Flügelzellpumpen. Aufgrund des rotierenden Antriebs besitzen diese Pumpen eine hohe Laufruhe. Die fluidische Trennung zwischen Pumpenein- und -ausgang erfolgt durch den fein tolerierten Formschluss, der an der Bildung des Arbeitsraums beteiligten Körper, so dass diese Pumpen ohne Ventile auskommen (Ivantysyn & Ivantysynova 1993).

## Oszillierende Verdrängerpumpen

Bei den oszillierenden Verdrängerpumpen wird die Drehbewegung der Antriebswelle mittels Kurbel- oder Exzentertrieb in eine linear oszillierende Bewegung umgewandelt (Ivantysyn & Ivantysynova 1993). In Abhängigkeit dieser linearen Bewegung wird der Arbeitsraum vergrößert (Ansaugen) und verkleinert (Ausstoßen). Um dabei dem Fluid eine Vorzugsrichtung vom Pumpeneingang zum Pumpenausgang zu geben, sind diese Pumpen mit Rückschlagventilen am Ein- und Ausgang versehen. Typische Vertreter dieser Bauart sind Kolben- und die Membranpumpen.

### **2.1.3 Schlauchpumpen**

Schlauchpumpen sind eine spezielle Form der Verdrängerpumpen, bei denen der Arbeitsraum aus einem flexiblen Schlauch besteht. Die Veränderung des Arbeitsraumes erfolgt über eine von außen aufgeprägte mechanische Verformung. Zur Erzeugung eines gerichteten Volumenstroms wird der Schlauch an mindestens einer Stelle okkludiert und dieser okkludierte Bereich in Richtung Pumpenausgang bewegt. Das Ansaugen von neuem Fluid am Pumpeneingang erfolgt durch das Aufrichten der unbelasteten Schlauchbereiche infolge der Elastizität.

Da Schlauchpumpen keine Rückschlagventile besitzen, ist deren Förderrichtung einfach umkehrbar, was zum Beispiel genutzt werden kann, um ein angeschlossenes Leitungssystem zu leeren oder verblockte Leitungen frei zu spülen (Dhumal & Kadam 2012).

### Bauformen der Schlauchpumpen

Schlauchpumpen können sowohl mit rotierendem als auch mit oszillierendem Antrieb ausgeführt werden. Schlauchrollenpumpen besitzen einen rotierenden Antrieb. Bei den Varianten mit senkrecht zur Flussrichtung oszillierendem Antrieb handelt es sich um sogenannte lineare Schlauchpumpen. Beiden Varianten sind in Abbildung 1 dargestellt.

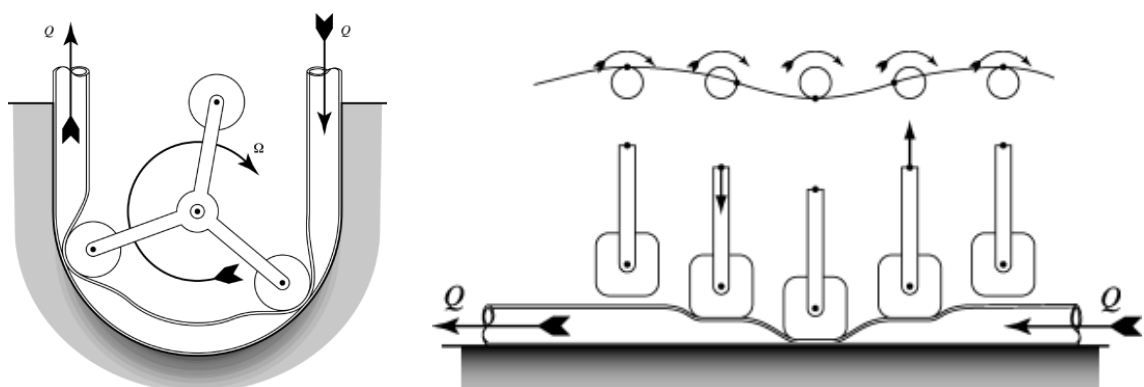


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Funktionsweise einer Schlauchrollenpumpe (links) und einer linearen Schlauchpumpe (rechts). Mit  $Q$  ist der erzeugte Volumenstrom und mit  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Antriebs bezeichnet. (Berg & Dallas 2015)

Bei Schlauchrollenpumpen wird der Schlauch durch eine oder mehrere auf einem Rotor befindliche Rollen okkludiert. Die Verschiebung der okkludierten Bereiche zum Pumpenausgang erfolgt durch die Drehung des Rotors. Üblicherweise befindet sich der Schlauch in einer Aufnahme, welche das Widerlager zu den Rollen darstellt. Die Aufnahme ist entweder als Teil des Pumpengehäuses oder als Kassette ausgeführt, welche auf den Rotor gesteckt wird. Bei einer Sonderform dieser Pumpe wird auf das Widerlager verzichtet. Stattdessen ist hier der Schlauch derart straff über den Rotor gespannt, dass die Okklusion an den Rollen in Folge der Vorspannung erfolgt (Durandy *et al.* 2014).

Bei der oszillierenden Ausführung als lineare Schlauchpumpe wird der Verschlussbereich eines flach aufliegenden Schlauchs durch mehrere hintereinander geschaltete Stößel in Richtung Pumpenausgang bewegt. Der Vorteil dieses Prinzips besteht in einem geringen Schlauchverschleiß. Peek *et al.* (1999) haben gezeigt, dass im Vergleich zu dem reinen Zusammendrücken, wie es in linearen Schlauchpumpen der Fall ist, ein Schlauch in einer Schlauchrollenpumpe um ein Vielfaches schneller verschleißt. Verantwortlich dafür machen sie die hohe Scherbeanspruchung, welche durch das Verschieben der Okklusionszone entlang der Schlauchlängsachse auftritt (Peek *et al.* 1999). Durch den Schlauchverschleiß nimmt der von der Pumpe erzeugte Volumenstrom kontinuierlich ab. Während der Volumenstrom linearer Schlauchpumpen eine hohe Langzeitstabilität aufweist (Peek *et al.* 1999), ist es bei Schlauchrollenpumpen zum genauen Dosieren erforderlich, in regelmäßigen Abständen den drehzahlabhängigen Volumenstrom nachzukalibrieren oder den Schlauch zu ersetzen (Dhumal & Kadam 2012).

Neben dem schnelleren Schlauchverschleiß tritt bei Schlauchrollenpumpen eine sogenannte Spallation (Absplitterung, Absprengung) von Schlauchmaterialpartikeln auf (Orenstein *et al.* 1982; Briceno & Runge 1992; Peek *et al.* 2000). Diese Partikel verunreinigen das gepumpte Fluid und können je nach Anwendung teils verheerende Folgen haben. Im medizinischen Bereich führt zum Beispiel die Einlagerung der Schlauchmaterialpartikeln in den Organen zu Fremdkörperreaktionen bei der Dialyse (Bommer *et al.* 1981; Leong *et al.* 1982). Auch gelten Schlauchmaterialpartikeln als eine der Ursachen für das Auftreten von mikro-Embolien nach der extrakorporalen Zirkulation (Orenstein *et al.* 1982). Bezüglich der Spallation in linearen Schlauchpumpen sind bisher noch keine Erkenntnisse veröffentlicht. Es ist allerdings anzunehmen, dass aufgrund der geringeren Schlauchbeanspruchung auch die Menge der „abgesprengten“ Partikel geringer ist. Dennoch sind die Schlauchrollenpumpen die häufiger verwendete Form der Schlauchpumpe, vorrangig aufgrund ihres kompakteren Bauraums und der geringeren Fertigungskosten (Hagen & Koslov 2010; Berg & Dallas 2015). Lineare Schlauchpumpen sind weniger verbreitet und werden überwiegend im medizintechnischen Bereich eingesetzt, zum

Beispiel bei der kontinuierlichen intravenösen Verabreichung von Medikamenten (Dhumal & Kadam 2012; Berg & Dallas 2015).

## 2.2 Pulsation

### 2.2.1 Definition

Gemäß Vetter (2006) lässt sich die theoretische Pulsation einer Pumpe anhand der Geometrie-verhältnisse des Arbeitsraumes berechnen. Bei Verdrängerpumpen besteht eine Abhängigkeit des durch die geometrischen Verhältnisse des Arbeitsraumes erzeugten Volumenstroms  $\dot{V}_{geo}$  vom Drehwinkel  $\varphi$  der Antriebswelle. Dieser geometrische Volumenstrom ist pulsationsfrei, wenn gilt:

$$\frac{d\dot{V}_{geo}(\varphi)}{d\varphi} = 0$$

Der geometrische Volumenstrom entspricht jedoch nicht zwangsläufig dem tatsächlich von der Pumpe erzeugten Volumenstrom. Aufgrund interner Leckströme setzt sich der tatsächliche Volumenstrom  $\dot{V}(\varphi)$  aus der Differenz des geometrischen Volumenstroms  $\dot{V}_{geo}(\varphi)$  und dem totalen inneren Leckstrom  $\dot{V}_{leck}(\varphi)$  zusammen:

$$\dot{V}(\varphi) = \dot{V}_{geo}(\varphi) - \dot{V}_{leck}(\varphi)$$

Der totale innere Leckstrom besteht aus der Summe der pumpeninternen Teilleckströme. Bei vielen Verdrängerpumpen ist der totale Leckstrom  $\dot{V}_{leck}(\varphi)$  eine drehwinkelabhängige Größe. Dadurch wird der reale Volumenstrom  $\dot{V}(\varphi)$  ebenfalls zu einer drehwinkelabhängigen Größe, auch wenn der geometrische Volumenstrom  $\dot{V}_{geo}(\varphi)$  eigentlich konstant und damit die Pumpe theoretisch pulsationsfrei wäre (Vetter 2006).

Die inneren Leckströme stellen in der Regel eine differenzdruckabhängige Größe dar, so dass mit steigendem Druck auch die Pulsation der Pumpe zunimmt. Neben den Leckströmen haben aber auch die Elastizitäten des Arbeitsraums und des Fluids einen Einfluss auf die Pulsation. Die größte Pulsation erzeugen zum Beispiel Schlauchpumpen und einzylindrige, oszillierende Verdrängerpumpen (Vetter 2006). In Schlauchpumpen verursacht das Öffnen des okkludierten Schlauches durch Abheben des Rollers oder Stößels einen kurzzeitigen Volumenrückfluss, wodurch der Volumenstrom am Pumpenausgang ins Stocken gerät (Moscato *et al.* 2008). Am Pumpeneingang verursacht das Absenken eines Rollers oder Stößel ebenfalls einen dem eigentlichen Volumenstrom entgegen gerichteten Volumenstrom (Moscato *et al.* 2008). Dadurch tritt bei Schlauchpumpen sowohl pumpeneingangsseitig als auch pumpenausgangs-seitig Pulsation auf.



Eine echte Pulsationsfreiheit wird tatsächlich nur während der intermittierenden linearen Kolbenbewegung in einer Kolbenpumpe erreicht (Vetter 2006). Dieser Effekt wird zum Beispiel in Kolbendosierpumpen (Spritzenpumpen) ausgenutzt, in denen der Kolben mit konstanter Geschwindigkeit (z. B. durch einen Linearantrieb) bewegt wird. Aufgrund des endlichen Kolbenweges ist der auf diese Weise erzeugte pulsationsfreie Volumenstrom jedoch zeitlich begrenzt.

Das Ausmaß der Pulsation lässt sich anhand des Ungleichförmigkeitsgrads  $\delta$  beschreiben. Dieser berechnet sich aus der Differenz, der innerhalb einer Periode  $T$  des zeitlichen Volumenstromverlaufs auftretenden Extremwerte  $\dot{V}_{\max}$  und  $\dot{V}_{\min}$  bezogen auf den mittleren Volumenstrom  $\dot{V}_m$  (Esser 1996):

$$\delta = \frac{\dot{V}_{\max} - \dot{V}_{\min}}{\dot{V}_m} \cdot 100\%$$

Für den mittleren Volumenstrom  $\dot{V}_m$  gilt:

$$\dot{V}_m = \frac{\int_0^T \dot{V}(t) dt}{T}$$

Abbildung 2 zeigt schematisch die zeitlichen Volumenstromverläufe verschiedener Verdrängerpumpentypen. Für eine Pumpe mit  $k$  identischen, sequenziell betätigten Arbeitsräumen ist bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Antriebswelle die Volumenstrompulsation mit der Frequenz  $f = k \cdot \frac{\omega}{2\pi}$  periodisch. In realen Pumpen ist die Volumenstrompulsation dagegen ausschließlich mit der Pumpendrehzahl  $\frac{\omega}{2\pi}$  periodisch, da fertigungsbedingt nie alle Arbeitsräume identisch sind (Goenechea 2007).

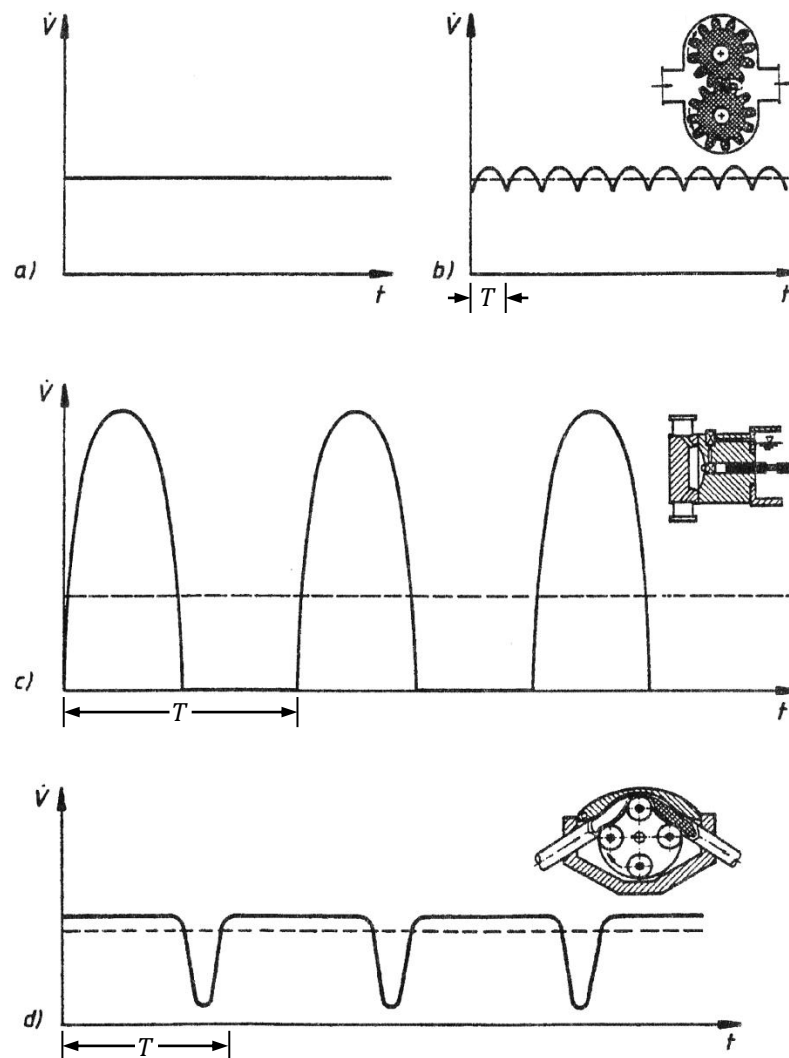


Abbildung 2: Schematische Darstellung der zeitlichen Volumenstromverläufe verschiedener Verdrängerpumpen. a) pulsationsfreie Kolbendosierpumpe; b) Zahnradpumpe; c) einzylindrige Kolbenmembranpumpe; d) Schlauchrollenpumpe. Für b) und d) gilt die Periode  $T$  unter der Annahme, dass alle Arbeitsräume in der betreffenden Pumpe identisch sind. Abbildung modifiziert nach Vetter 2006, S. 46.

### 2.2.2 Maßnahmen zur Pulsationsminderung

Eine Möglichkeit der Pulsationsminderung besteht darin, dem Pumpenausgang einen sogenannten „Pulsationsdämpfer“ nachzuschalten. Als Pulsationsdämpfer werden umgangssprachlich alle Sekundärmaßnahmen zur Pulsationsminderung bezeichnet. Entgegen der Bezeichnung als „Dämpfer“ basiert deren Funktion nicht auf der Energiedissipation, sondern auf der „Pulsationsauslöschung“ durch Erzeugen von der Pulsation entgegen gerichteten Volumenstromverläufen. Die dabei stattfindende Energiedissipation durch Reibungsverluste ist vernachlässigbar (Goenechea 2007).

Eine andere Möglichkeit der Pulsationsminderung besteht darin, zwei oder mehr pulsierende Volumenströme so phasenversetzt zu überlagern, dass der resultierende Volumenstrom eine geringere Pulsation aufweist als die Einzelvolumenströme. Dafür lassen sich entweder die

Volumenströme separater Pumpen kombinieren oder mehrere in einer Pumpe angeordnete, phasenversetzt betriebene Arbeitsräume „parallel schalten“. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl pumpenspezifischer Primärmaßnahmen, hinsichtlich derer der Fokus dieser Arbeit auf den für die Schlauchpumpen relevanten liegt.

### Pulsationsdämpfer

Passive Pulsationsdämpfer arbeiten nach dem Prinzip der Energierekuperation und wirken als „hydraulische Kapazität“. Bereits die Elastizität des an die Pumpe angeschlossenen Leitungssystems wirkt als Pulsationsdämpfer. Je länger die Leitung und je geringer die Steifigkeit des Leitungsmaterials, desto größer ist der dämpfende Effekt. Ihre biologische Entsprechung hat diese Art der Dämpfung in der sogenannten „Windkesselfunktion“, mit welcher die Pulsationsdämpfung des arteriellen (Blut-)Drucks durch die Elastizität des Gefäßsystems bezeichnet wird (Volhard & Fahr 1914). Eine erstmalige Erwähnung des „Windkessels“ in diesem Zusammenhang erfolgte bereits 1849 durch den Arzt Georg Weber (Weber 1849). „Windkessel“ ist die alte, umgangssprachlich aber zum Teil noch gebräuchliche, Bezeichnung für einen passiven Druckausgleichsbehälter. Eine der ersten dokumentierten Anwendungen zur Pulsationsminderung in Feuerlöschpumpen geht auf den deutschen Mathematiker Wenceslaus Johann Gustav Karsten (Karsten 1773) zurück.

Technisch gesehen ist ein Windkessel ein hydropneumatischer Speicher, welcher die elastische Federwirkung eines vorgespannten Gases nutzt, um durch Volumenaustausch mit einem Fluidreservoir Druckschwankungen auszugleichen. Als Gas wird überwiegend Stickstoff verwendet. Bei speziellen Anwendungen kommen auch andere Gase, wie Kohlendioxid oder Helium, zum Einsatz. Die Empfehlungen für den Vorfülldruck des Gases reichen vom 0,6-fachen (Nollau & Herschel 2011) bis 0,9-fachen (Findeisen & Findeisen 1994) des zu erwartenden mittleren Leitungsdrucks. Zur Vermeidung der druckabhängigen Gasabsorption werden Fluid und Gas häufig über eine Elastomermembran oder Elastomerblase voneinander getrennt. Dabei entscheidend ist ein schnelles Ansprechverhalten (Nollau & Herschel 2011).

Passive Pulsationsdämpfer können die Amplitude einer Druckpulsation verringern, jedoch nicht vollständig glätten. Die Pulsationsminderung ist umso besser, je größer das Speichervolumen ist. Eine vollständige Pulsationsdämpfung ließe sich nur mit einem unendlich großen Gasvolumen erzielen (Nollau & Herschel 2011). In der Praxis richtet sich die Baugröße des Pulsationsdämpfers nach dem Ausmaß der benötigten Pulsationsminderung, beziehungsweise die erzielbare Pulsationsminderung nach dem für den Pulsationsdämpfer verfügbaren Bauraum. Der Vorteil derartiger passiver Pulsationsdämpfer liegt in ihrem einfachen Aufbau und der damit verbundenen wartungsfreien Funktionsweise. Jedoch lassen sich passive Pulsationsdämpfer

lediglich auf einen Betriebspunkt des fluidischen Systems optimal auslegen (Kiesbauer 1991; Kurr 1994). Für alle von diesem Betriebspunkt abweichenden Zustände erfolgt keine optimale Pulsationsminderung (Kurr 1994), weshalb sich passive Pulsationsdämpfer insbesondere für Pumpen eignen, welche mit konstanter Drehzahl betrieben werden. Eine Weiterentwicklung der passiven Pulsationsdämpfer stellen adaptive Pulsationsdämpfer dar, deren Gasfülldruck in Abhängigkeit des Betriebsdrucks im fluidischen System geregelt wird (Kiesbauer 1991; Esser 1996). Mit ihnen lässt sich bei variablem Betriebspunkt des Systems eine bessere Pulsationsminderung erreichen als mit rein passiven Pulsationsdämpfern.

Die aktive Pulsationsdämpfung funktioniert nach dem Prinzip der Auslöschung zweier überlagerter Wellen. Dazu wird unter externer Energiezufuhr gezielt eine der Pulsation im fluidischen System entgegengerichtete Pulsation erzeugt. Der dafür erforderliche technische Aufwand ist wesentlich höher als bei der passiven oder adaptiven Pulsationsdämpfung (Kurr 1994). Auch hängt die erreichbare Pulsationsminderung sehr stark von der Art der Pulsation ab. Während eine harmonische Pulsation bekannter Frequenz mit geringem Regelungsaufwand vollständig eliminiert werden kann, lässt sich bei einer Pulsation von unbekannter, wechselnder Frequenz selbst mit einem deutlich aufwändigeren Reglerentwurf nur eine Minderung erreichen (Kurr 1994).

### Kombination pulsierender Volumenströme

Bereits durch zwei im Gegentakt arbeitende Pumpen beziehungsweise Kammern einer (Kolben-) Pumpe, welche abwechselnd den pumpenausgangsseitigen Volumenstrom speisen, lässt sich eine Verringerung der Volumenpulsation erreichen (Stenger *et al.* 1976). Die verbleibende Pulsation ist umso geringer, je mehr Kammern auf diese Weise kombiniert werden, jedoch nimmt dadurch die Frequenz der Pulsation zu. Abbildung 3 zeigt eine Schlauchrollenpumpe mit einem sogenannten Doppelrotor, bei dem die Rollen des einen Rotors um den halben Rollenabstand versetzt zu den Rollen des anderen Rotors angeordnet sind. Jeder der Rotoren betätigt einen separaten Pumpschlauch. Die Überlagerung beider Volumenströme erfolgt durch Koppelung der Schlauchausgänge.

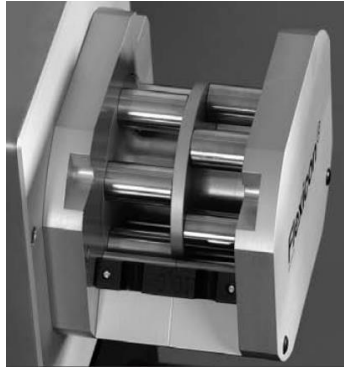


Abbildung 3: Rollenpumpe mit 6-Rollen-Doppelrotor. Die beiden Rotoren sind um einen halben Rollenabstand versetzt. Jeder der Rotoren betätigt einen Pumpschlauch. Die Fluidströme beider Schläuche werden über einen Y-Verbinder zusammengeführt, dadurch wird die Pulsation des resultierenden Volumenstroms verringert. (Ejsing 2010)

Abbildung 4 veranschaulicht das Prinzip anhand des Schemas einer linearen Schlauchpumpe. Wie bei der Doppelrotor-Pumpe werden auch hier die Ausgänge zweier Pumpschläuche zusammengeführt. Die Betätigung der Schläuche erfolgt durch mehrere in Reihe geschaltete doppelseitige Stößel, wobei die Schläuche an den gegenüberliegenden Stößelseiten angeordnet sind, und dadurch die Volumenströme um  $180^\circ$  phasenversetzt erzeugt werden.

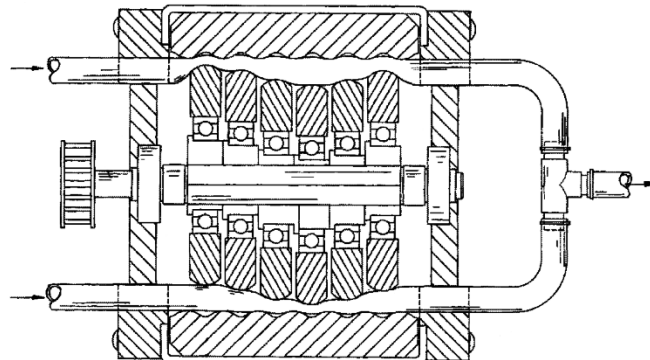


Abbildung 4: Schema einer linearen Schlauchpumpe, bei welcher durch Zusammenführen der Volumenströme zweier gegenläufig betätigter Schläuche die Pulsation verringert wird. Abbildung modifiziert nach Geschwender 2013.

Die Idee hinter den gezeigten Schlauchpumpenvariationen ist plausibel, bringt jedoch einen erhöhten gerätetechnischen Aufwand. Während bei der Doppelrotorpumpe dieser Aufwand vergleichsweise gering ist, erfordert die dargestellte gedoppelte lineare Schlauchpumpe eine deutlich aufwendigere Konstruktion. Hinzu kommt die Tatsache, dass sich auf diese Weise lediglich eine Verringerung der Pulsation, jedoch keine vollständige Beseitigung erreichen lässt.

### Größere Rollenzahl

Im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen Überlagerung mehrerer Volumenströme lässt sich bei Schlauchrollenpumpen die Pulsation auch durch Erhöhung der Rollenzahl verringern (Vetter 2006; Aitavade *et al.* 2012). Mit einer größeren Rollenzahl wird die Anzahl der okkludierten

Bereiche im Schlauch erhöht. Dadurch nimmt einerseits die Pulsationsfrequenz proportional zur Rollenzahl zu, andererseits nimmt das vom Schlauch geförderte Volumen ab (Vetter 2006). Um den gleichen Volumenstrom zu erzeugen, muss sich der Rotor bei gesteigerter Rollenzahl folglich schneller drehen, wodurch die Pulsationsfrequenz noch weiter zunimmt. Die Verringerung des Ungleichförmigkeitsgrades beruht in diesem Fall darauf, dass bei einer höheren Anregungsfrequenz die Pulsationsamplitude, in Folge der schwingungsdämpfenden Wirkung viskoser Flüssigkeiten, abnimmt (Findeisen & Findeisen 1994). Theoretisch ließe sich die Pulsation einer Schlauchrollenpumpe durch eine große Rollenzahl in Verbindung mit kleinem Schlauchinnendurchmesser und hoher Drehzahl fast vollständig beseitigen. Dies erfolgt allerdings auf Kosten eines erhöhten Schlauchverschleißes (Dhumal & Kadam 2012). Zum Beispiel wird bei einer Verdoppelung der Rollenzahl die Lebenszeit des Pumpschlauches mehr als halbiert, da neben der verdoppelten Anzahl der dem Schlauch aufgeprägten Okklusionen zusätzlich die Rotordrehzahl erhöht werden muss, um den gleichen Fluss zu erzeugen.

### Variable Antriebsgeschwindigkeit

Normalerweise werden Schlauchpumpen mit einer über den Arbeitszyklus konstanten Antriebsdrehzahl betrieben. Der Zusammenhang zwischen Momentanvolumenstrom und Drehzahl wird in diesem Fall ausschließlich zum Einstellen des angestrebten mittleren Volumenstroms genutzt. Die Drehzahlabhängigkeit des Momentanvolumenstroms kann jedoch auch zur Verringerung der Pulsation genutzt werden. Erfolgt die Drehzahlregelung in Abhängigkeit der Messwerte eines am Pumpenausgang befindlichen Druck- oder Volumenstromsensors, lässt sich eine Pulsationsminderung ohne Vorkenntnis des zu erwartenden Volumenstromverlaufs erzeugen (Mohrman 1980; Borgström *et al.* 1981). Ist der während einer Antriebsumdrehung erzeugte Volumenstromverlauf bekannt, kann die Regelung der Antriebsgeschwindigkeit auch als Vorsteuerung direkt anhand der Antriebsposition erfolgen. So lässt sich zum Beispiel bei einer Schlauchrollenpumpe das „Stocken“ des Volumenstromes verringern, indem die Antriebspositionen, an denen die Rollen vom Schlauch abheben, mit einer wesentlich höheren Drehzahl „durchfahren“ werden (Nelson & Bartz 2014). Theoretisch ließe sich auf diese Weise bereits mit einer einzigen Rolle ein pulsationsarmer Volumenstrom erzeugen. In der Praxis ist die erreichbare Verringerung der Pulsation durch das Beschleunigungsvermögen sowie die Maximalgeschwindigkeit des Antriebs begrenzt. Zum Beispiel erfordert die starke Beschleunigung von Elektromotoren hohe Motorströme. Diese müssen einerseits von einer leistungsfähigen Regelelektronik bereitgestellt werden, andererseits müssen die Motoren entsprechend dimensioniert sein, um die in Folge der hohen Ströme auftretende Wärme ableiten zu können.

Insofern ist dieses Prinzip aufgrund wirtschaftlicher und bautechnischer Überlegungen nur bedingt sinnvoll.

### Pumpeninterne Ausgleichskammer

Eine weitere Möglichkeit zur Pulsationsverringering besteht darin, die Pumpe mit einer Ausgleichskammer zu versehen, welche bereits pumpenintern für eine Vergleichmäßigung des Volumenstromes sorgt, indem sie zu geringe oder zu große Momentanvolumenströme ausgleicht. Das Betätigungsregime der Ausgleichskammer muss dazu im Vorfeld genau auf die charakteristische Pulsation der Pumpe abgestimmt werden. Idealerweise erfolgt eine mechanische Synchronisation von Pumpe und Ausgleichskammer, so dass auf eine aufwendige Regelung verzichtet werden kann. Zwei schematische Darstellungen von Schlauchpumpen mit mechanisch gekoppelten internen Ausgleichskammern sind in Abbildung 5 dargestellt. Insbesondere für lineare Schlauchpumpen bietet sich das Prinzip der integrierten Ausgleichskammer an. Im Folgenden wird darauf näher eingegangen.

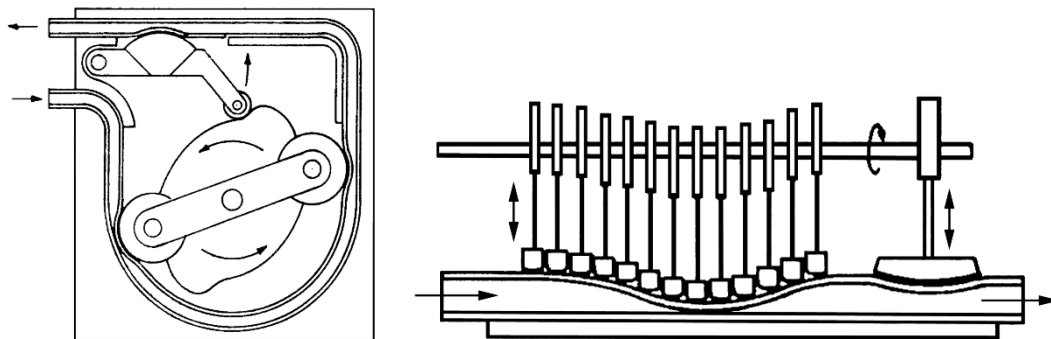


Abbildung 5: Prinzip der Pulsationsminderung durch eine integrierte Ausgleichskammer, für eine Schlauchrollenpumpe (links) und eine lineare Schlauchpumpe (rechts). Abbildungen modifiziert nach Casimir 1970.

### **2.2.3 Spezialfall lineare Schlauchpumpe**

Für die konstruktive Gestaltung von mutmaßlich pulsationsfreien, beziehungsweise pulsationsarmen Schlauchpumpen existieren verschiedenste Konzepte (Casimir 1970, 1974; Kabayashi & Morikawa 1981; Faeser 1989; Rosenberger 1989; Hagen & Koslov 2010; Feller & Schimmelpfennig 2010; Geschwender 2013; Nelson & Bartz 2014). Dass es bisher keine praktischen Vertreter der darin beschriebenen Pumpen gibt, deutet auf die mangelnde Umsetzbarkeit dieser Konzepte hin. Gleichzeitig zeichnet sich ab, dass sich insbesondere das Prinzip der linearen Schlauchpumpe für die Erzeugung eines theoretisch pulsationsfreien Volumenstromes zu eignen scheint.

Eine lineare Schlauchpumpe benötigt für ihre Funktion mindestens drei Stößel, damit zu jedem Zeitpunkt Pumpenein- und Pumpenausgang fluidisch voneinander getrennt sind. Je ein Stößel

erfüllt die Funktion des Ein- beziehungsweise Auslassventils, und ein Stößel bildet die Pumpkammer. Wird die Pumpe um weitere Stößel ergänzt, welche vor dem Ein- oder nach dem Auslassventil angeordnet sind, so entspricht deren Funktion der eines „Dämpfers“. Im Gegensatz zu dieser getroffenen Funktionsdefinition kann die tatsächliche Funktion der Stößel auch „fließend“ sein. Ein auf den Schlauch drückender Stößel erzeugt immer einen Momentanvolumenstrom, unabhängig davon ob die ihm zugedachte Funktion die eines Ventils (vollständiger Schlauchverschluss) oder die einer Pumpkammer (Volumenstromerzeugung) ist. Im Gegenzug lässt sich jede Pumpkammer auch als Ventil nutzen, sofern der Schlauch vollständig okkludiert wird. Diese Doppelfunktion lässt sich ausnutzen, um einen pulsationsfreien Volumenstrom zu erzeugen.

Abbildung 6 zeigt den Entwurf einer linearen 4-Stößel-Schlauchpumpe zur Erzeugung eines unterbrechungsfreien Ausgangsvolumenstroms nach Faeser (1989).

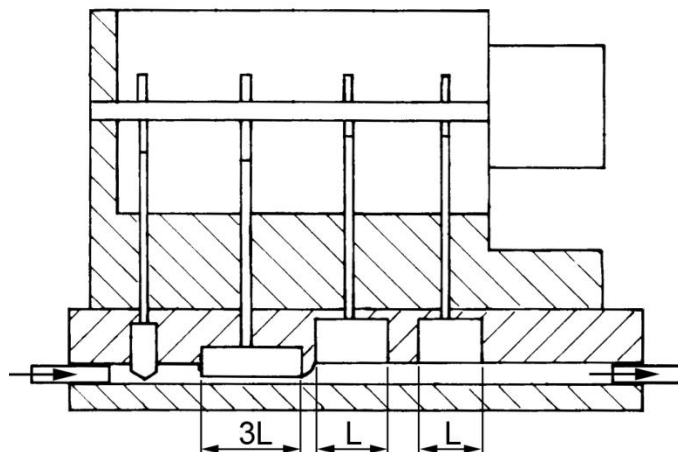


Abbildung 6: Schematische Darstellung einer linearen 4-Stößel-Schlauchpumpe nach Faeser (1989). Von links: Der erste Stößel erfüllt die Funktion des Einlassventils. Die restlichen Stößel bilden zusammen mit den darunter befindlichen Schlauchabschnitten die Pumpkammern, wobei der zweite Stößel die dreifache Wirklänge der Stößel 3 und 4 aufweist. Abbildung modifiziert nach Faeser 1989.

Der vom Pumpeneingang her gezählte erste Stößel wirkt als Einlassventil und besitzt einen deutlich kleineren auf den Schlauch projizierten Querschnitt als die anderen Stößel. Die restlichen drei Stößel sind wesentlich größer ausgeführt. Der zweite Stößel bildet zusammen mit dem Schlauch die Pumpkammer und besitzt die dreifache Wirklänge des dritten und vierten Stößels. Der dritte Stößel erfüllt gemäß der zuvor getroffenen Definition die Aufgabe des Auslassventils und wird zusätzlich mit zur Erzeugung des ausgangsseitigen Volumenstromes genutzt. Der vierte Stößel fungiert als in die Pumpe integrierte Ausgleichskammer. (Faeser 1989)

Das zeitliche Zusammenspiel der Stößel beschreibt Faeser anhand des in Abbildung 7 gezeigten Phasenplanes. Gemäß diesem besteht ein Arbeitszyklus aus drei isochronen Phasen, im Verlauf derer die Auf- und Abwärtsbewegung der Stößel mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Vorgesehen sind die zwei Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ , mit  $v_1 \gg v_2$ . Die Schaltvorgänge des



Einlassventils (Stößel 1) werden mit der Geschwindigkeit  $v_1$  ausgeführt. Die Erzeugung des pumpenausgangsseitigen Volumenstroms erfolgt mit der Geschwindigkeit  $v_2$ , welche so zu wählen ist, dass sich ein Stößel von der Position „offen“ zu Beginn der Phase in die Position „geschlossen“ am Ende der Phase bewegt.

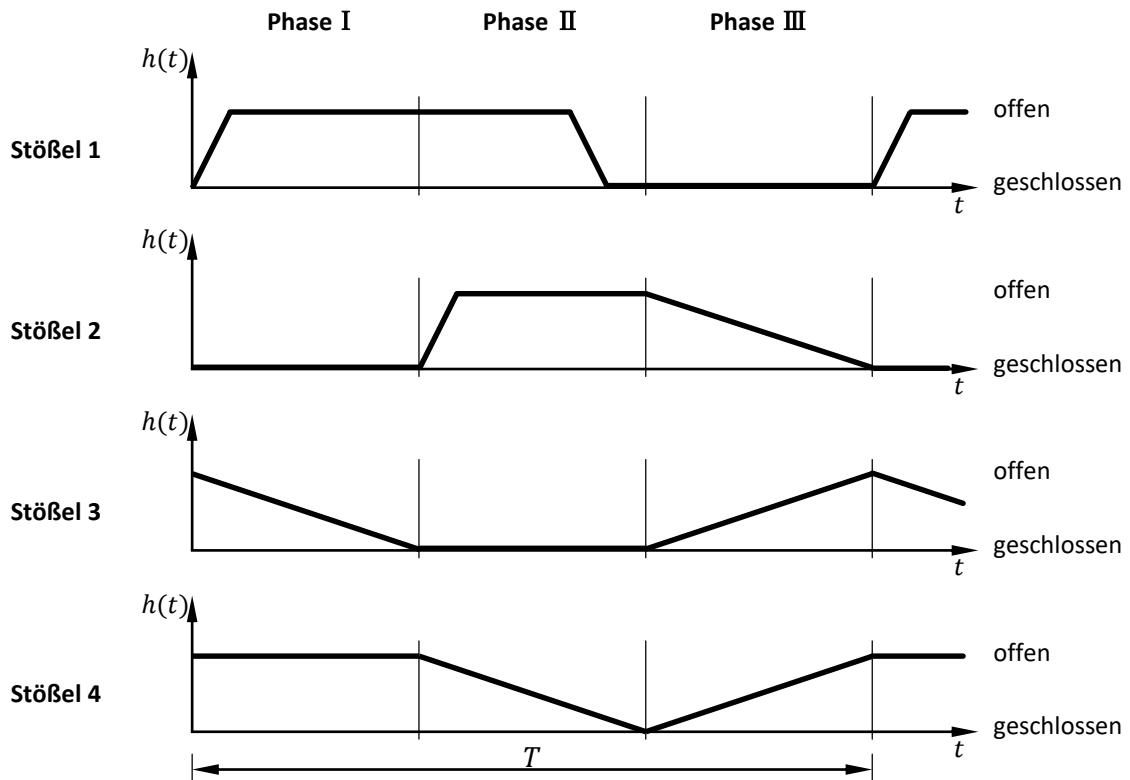


Abbildung 7: Phasenplan einer linearen 4-Stößel-Schlauchpumpe nach Faeser (1989). Dargestellt sind die Stößelhübe  $h(t)$  für einen Arbeitszyklus der Periode  $T$ . Die Positionen „offen“ und „geschlossen“ kennzeichnen die Umkehrpunkte der Stößelhübe. In der Position „geschlossen“ ist der unter dem Stößel befindliche Schlauchabschnitt vollständig okkludiert. Abbildung modifiziert nach Faeser 1989.

Zu Beginn der Phase I öffnet das durch den Stößel 1 gebildete Einlassventil mit der Geschwindigkeit  $v_1$  und bleibt anschließend geöffnet. Der Stößel 2 hält für die gesamte Dauer der Phase I den Schlauch geschlossen. Der pumpenausgangsseitige Volumenstrom wird in der Phase I durch den Stößel 3 erzeugt, welcher den Schlauch mit der Geschwindigkeit  $-v_2$  okkludiert. Stößel 4 verbleibt in der „offenen“ Position. In der Phase II hält Stößel 3 den Schlauch geschlossen, während Stößel 4 den Schlauch mit der Geschwindigkeit  $-v_2$  okkludiert und dabei Fluidvolumen zum Pumpenausgang fördert. Unmittelbar zu Beginn der Phase II „öffnet“ Stößel 2 mit der Geschwindigkeit  $v_1$ , wodurch sich der darunter befindliche Schlauchabschnitt aufrichtet und Fluid vom Pumpeneingang ansaugt. Im Anschluss daran schließt das bis dahin offene Einlassventil (Stößel 1) noch während der Phase II und bleibt anschließend bis zum Ende der Phase III geschlossen. In der Phase III wird der Schlauch durch Stößel 2 mit der Geschwindigkeit  $-v_2$  okkludiert, während die Schlauchabschnitte unter den Stößeln 3 und 4

„geöffnet“ werden und dabei einen Teil des durch den Stößel 2 (dreifache Wirklänge) verdrängten Volumens aufnehmen. Das restliche durch den Stößel 2 verdrängte Volumen wird an den Pumpenausgang abgegeben. (Faeser 1989)

Ein weiteres Prinzip für eine kontinuierlich fördernde lineare Schlauchpumpe ist durch Feller & Schimmelpfennig (2010) beschrieben. Feller & Schimmelpfennig beziehen sich in ihrem Prinzip zunächst auf Verdrängerpumpen im Allgemeinen und benennen die lineare Schlauchpumpe als konkrete Ausführung. Eine Verdrängerpumpe nach Feller & Schimmelpfennig besteht aus fünf in Reihe geschalteten Arbeitsräumen, wobei der mittlere Arbeitsraum das dreifache Arbeitsvolumen der übrigen Arbeitsräume aufweist, so dass ein Arbeitsvolumenverhältnis von  $1 : 1 : 3 : 1 : 1$  vorliegt. Abbildung 8 zeigt das Schema einer derart aufgebauten linearen Schlauchpumpe.

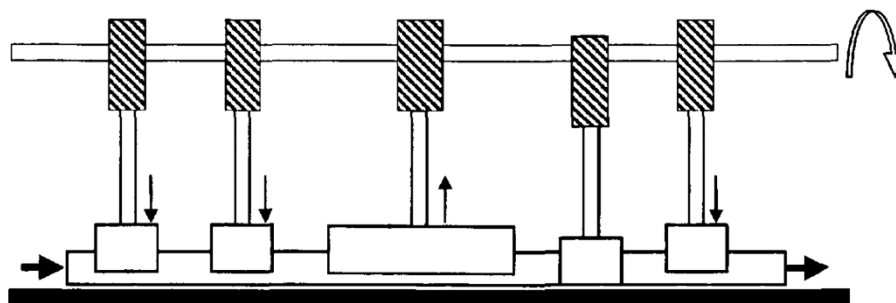


Abbildung 8: Schema einer linearen Schlauchpumpe mit fünf Kammern für die pulsationsfreie Förderung von Fluiden und Suspensionen. Abbildung modifiziert nach Feller & Schimmelpfennig 2010.

Die unter den Stößeln befindlichen Schlauchabschnitte, welche die Arbeitsräume der Pumpe darstellen, bezeichnen Feller & Schimmelpfennig als „Pumpkammern“ (im Folgenden kurz „Kammern“). Das Zusammenwirken der fünf Kammern ist anhand des in Abbildung 9 dargestellten Phasenplanes beschrieben. Feller & Schimmelpfennig beziehen sich darin auf den zeitlichen Verlauf der in den Kammern enthaltenen Fluidvolumina. Die Darstellung erfolgt in normierter Form, bezogen auf die Größe des Arbeitsvolumens einer der „kleinen Kammern“. Von einer Kammer angesaugtes Volumen ist durch ein negatives Vorzeichen und ausgestoßenes Volumen durch ein positives Vorzeichen gekennzeichnet. Analog zu Faeser (1989) besteht der Arbeitszyklus der Pumpe aus drei isochronen Phasen. In der Phase I wird Kammer 1 mit Fluid befüllt, während Kammer 2 als geschlossenes „Einlassventil“ fungiert und Kammer 3 Volumen der Größe 3 abgibt. Zeitgleich nehmen die Kammern 4 und 5 jeweils Volumen der Größe 1 auf, so dass am Pumpenausgang Volumen der Größe 1 ausgestoßen wird. In der Phase II ist Kammer 3 geschlossen und trennt dadurch Pumpeneingang und -ausgang. Kammer 1 ist bereits vollständig gefüllt und verharrt in diesem Zustand, während Kammer 2 im Verlauf der Phase II Volumen der Größe 1 vom Pumpeneingang aufnimmt. Ausgangsseitig gibt Kammer 4 Volumen der Größe 1 ab, während Kammer 5 im gefüllten Zustand verharrt. In Phase III ist Kammer 4

dicht geschlossen und Kammer 5 gibt das in ihr enthaltene Fluidvolumen der Größe 1 an den Pumpenausgang ab. Pumpeneingangsseitig geben die Kammern 1 und 2 jeweils Fluidvolumen der Größe 1 ab, welches von Kammer 3 aufgenommen wird. Da Kammer 3 insgesamt Fluidvolumen der Größe 3 aufnimmt, wird unter der Voraussetzung der Inkompressibilität des Fluids ein Fluidvolumen der Größe 1 am Pumpeneingang angesaugt. (Feller & Schimmelpfennig 2010)

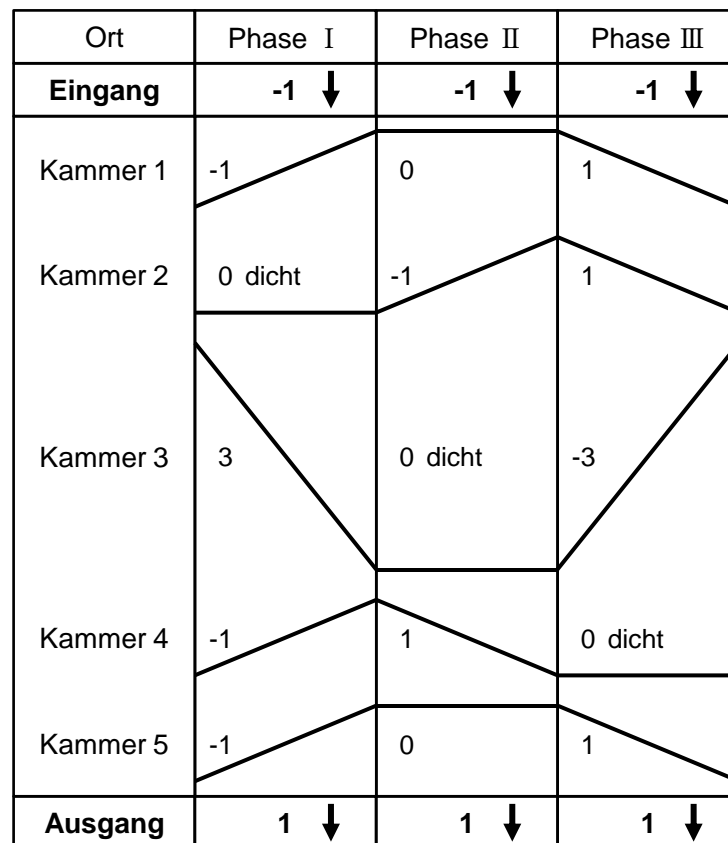


Abbildung 9: Phasenplan einer pulsationsfreien Verdrängerpumpe nach Feller & Schimmelpfennig (2010). Der Phasenplan stellt schematisch die Volumenänderungen der Arbeitsräume (Kammern) dar, in deren Folge am Ein- und Ausgang der Pumpe ein konstanter Volumenstrom erzeugt wird. Ein Arbeitszyklus besteht aus drei isochronen Phasen. Die Zahlen an den Kurven beschreiben die normierte Volumenänderung innerhalb einer Phase. Abbildung modifiziert nach Feller & Schimmelpfennig 2010.

Inwieweit sich das von Feller & Schimmelpfennig (2010) beschriebene Pumpenkonzept tatsächlich für die Erzeugung eines kontinuierlichen Volumenstroms konstanter Größe eignet, wird im Folgenden genauer analysiert.

### 3 Kritische Analyse vorhandener Konzepte

In Kapitel 2.2.3 wurden zwei Konzepte für kontinuierlich fördernde lineare Schlauchpumpen vorgestellt. Das von Faeser (1989) beschriebene Konzept einer linearen Schlauchpumpe zielt auf die Erzeugung eines kontinuierlichen Volumenstroms am Pumpenausgang. Der erste Nachteil dieses Konzeptes ist die Erzeugung eines diskontinuierlichen Volumenstroms am Pumpeneingang. Zu Beginn der Phase II wird durch das schnelle Öffnen ( $v_1 \gg v_2$ ) des unter Stößel 2 befindlichen Schlauchabschnitts kurzzeitig ein pumpeneingangsseitiger Volumenstrom erzeugt. In der restlichen Zeit des Arbeitszyklus wird kein Fluid aufgenommen, so dass die Pumpe eingangsseitig eine starke Pulsation aufweist. Der zweite und gravierendere Nachteil des Konzeptes besteht in der Erzeugung des pumpenausgangsseitigen Volumenstroms durch die Okklusion des Pumpschlauches mit konstanter Stößelgeschwindigkeit  $v_2$ . Wie später in den Kapiteln 4.2.1 und 6.1 gezeigt wird, besteht bei der Okklusion des Pumpschlauches kein linearer Zusammenhang zwischen Stößelhub und verdrängtem Volumen. Folglich wird bei konstanter Stößelgeschwindigkeit am Pumpenausgang kein konstanter, sondern ein über den Arbeitszyklus schwankender Volumenstrom erzeugt.

Das von Feller & Schimmelpfennig (2010) beschriebene Konzept ähnelt jenem von Faeser (1989). Beim Vergleich der Pumpenschemata in Abbildung 6 und Abbildung 8 wird deutlich, dass es sich offensichtlich um eine Weiterentwicklung der Pumpe nach Faeser (1989) handelt. Anstelle des nach Faeser durch den Stößel 1 gebildeten Einlassventils (vgl. Abbildung 6) kommen in der von Feller & Schimmelpfennig beschriebenen Pumpe eingangsseitig zwei separate Stößel zum Einsatz. Durch diese Anordnung ist es möglich, auch pumpeneingangsseitig während des gesamten Arbeitszyklus kontinuierlich Fluid anzusaugen. Des Weiteren beschreiben Feller & Schimmelpfennig die Funktionsweise der Pumpe anhand zeitlich linearer Änderung der in den Pumpkammern enthaltenen Fluidvolumina und schließen aus der zeitlich konstanten Volumenbilanz auf die pulsationsfreie Arbeitsweise. Der von Feller & Schimmelpfennig vorgestellte Phasenplan erscheint zunächst plausibel. Die Analyse der dafür erforderlichen dynamischen Prozesse offenbart allerdings, dass eine derartige Betätigung der Pumpkammern technisch nicht realisierbar ist. Zur Analyse der Pumpe nach Feller & Schimmelpfennig werden für den in Abbildung 9 dargestellten Phasenplan Teilübertragungsfunktionen (kurz TüF) formuliert. Das zeitabhängige Volumen einer Kammer ist anhand einer TüF pro Phase beschreibbar. Für das System Pumpe resultieren daraus, die in Abbildung 10 dargestellten, 15 TüF. Diese besitzen aufgrund der ausschließlich als linear postulierten Volumenänderungen die allgemeine Form  $V(t) = K_1 \cdot t + K_0$ . Die Konstanten  $K_1$  und  $K_0$  nehmen in Abhängigkeit der

Phase unterschiedliche Werte an. Für die Phasen, in denen keine Volumenänderung stattfindet, gilt  $K_1 = 0$ .

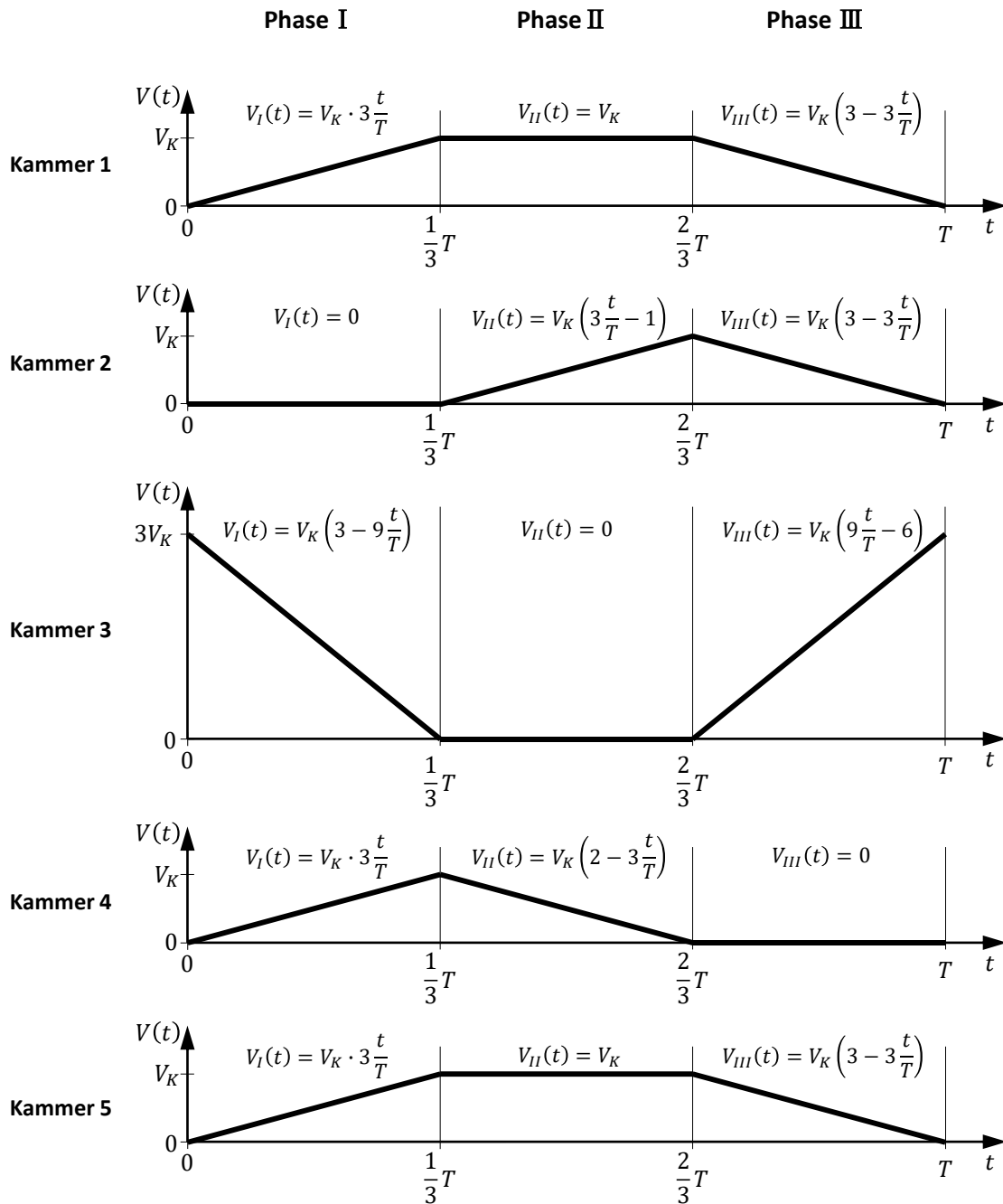


Abbildung 10: Darstellung der aus dem in Abbildung 9 gezeigten Phasenplan formulierten Teilübertragungsfunktionen. Das normierte Arbeitsvolumen der Pumpkammern ist mit  $V_K$  bezeichnet. Ein Pumpzyklus besitzt die Periode  $T$ .

Die aneinandergereihten TUF einer Kammer überlappen an den Intervallgrenzen und beschreiben den stetigen zeitlichen Verlauf des Volumens während eines Arbeitszyklus der Periode  $T$ :

$$V_I\left(\frac{1}{3}T\right) = V_{II}\left(\frac{1}{3}T\right)$$

$$V_{II}\left(\frac{2}{3}T\right) = V_{III}\left(\frac{2}{3}T\right)$$

Des Weiteren erfüllen die TUF die Bedingung der Stetigkeit und damit Kontinuität für aufeinanderfolgende Arbeitszyklen, da:

$$V_I(0) = V_{III}(T)$$

Die Ableitung der TUF  $V(t)$  nach  $t$  beschreibt die geometrischen Teilvolumenströme  $\dot{V}(t) = Q(t)$ . Abbildung 11 zeigt die zeitlichen Verläufe der aus dem Phasenplan von Feller & Schimmelpfennig (2010) resultierenden geometrischen Volumenströme. Diese sind ausschließlich innerhalb der einzelnen Phasen des Pumpzyklus stetig, jedoch nicht in den Phasenübergängen:

$$Q_I\left(\frac{1}{3}T\right) \neq Q_{II}\left(\frac{1}{3}T\right)$$

$$Q_{II}\left(\frac{2}{3}T\right) \neq Q_{III}\left(\frac{2}{3}T\right)$$

$$Q_I(0) \neq Q_{III}(T)$$

In den Übergängen zwischen den Phasen weisen die Übertragungsfunktionen  $Q(t)$  „Sprünge“ auf. An den Stellen sprunghafter Änderung in  $Q(t)$  gilt für zweite Ableitung der TUF  $V(t)$  nach der Zeit  $\ddot{V}(t) \rightarrow \infty$ . Das bedeutet, das in den Kammern enthaltene Fluid müsste in den Phasenübergängen unendlich stark beschleunigt werden.

Die mechanische Aktuierung der Arbeitsräume erfolgt bei einer linearen Schlauchpumpe durch die auf den Schlauch drückenden Stößel. Folglich besteht ein direkter Zusammenhang zwischen Stößelhub  $h(t)$  und Kammervolumen  $V(t)$  der Form  $h(t) = f(V(t))$ . Für die Stößelgeschwindigkeit gilt dementsprechend  $\dot{h}(t) = f(\dot{V}(t))$  und für die Beschleunigung der Stößel  $\ddot{h}(t) = f(\ddot{V}(t))$ . An den Stellen  $\ddot{V}(t) \rightarrow \infty$  folgt damit für die Beschleunigung der Stößel  $\ddot{h}(t) \rightarrow \infty$ .

Real können weder die „Stößel“ noch das Fluid selbst derart beschleunigt werden, weshalb sich das von Feller & Schimmelpfennig (2010) vorgestellte Pumpenkonzept bei genauerer Betrachtung als technisch nicht realisierbar erweist.

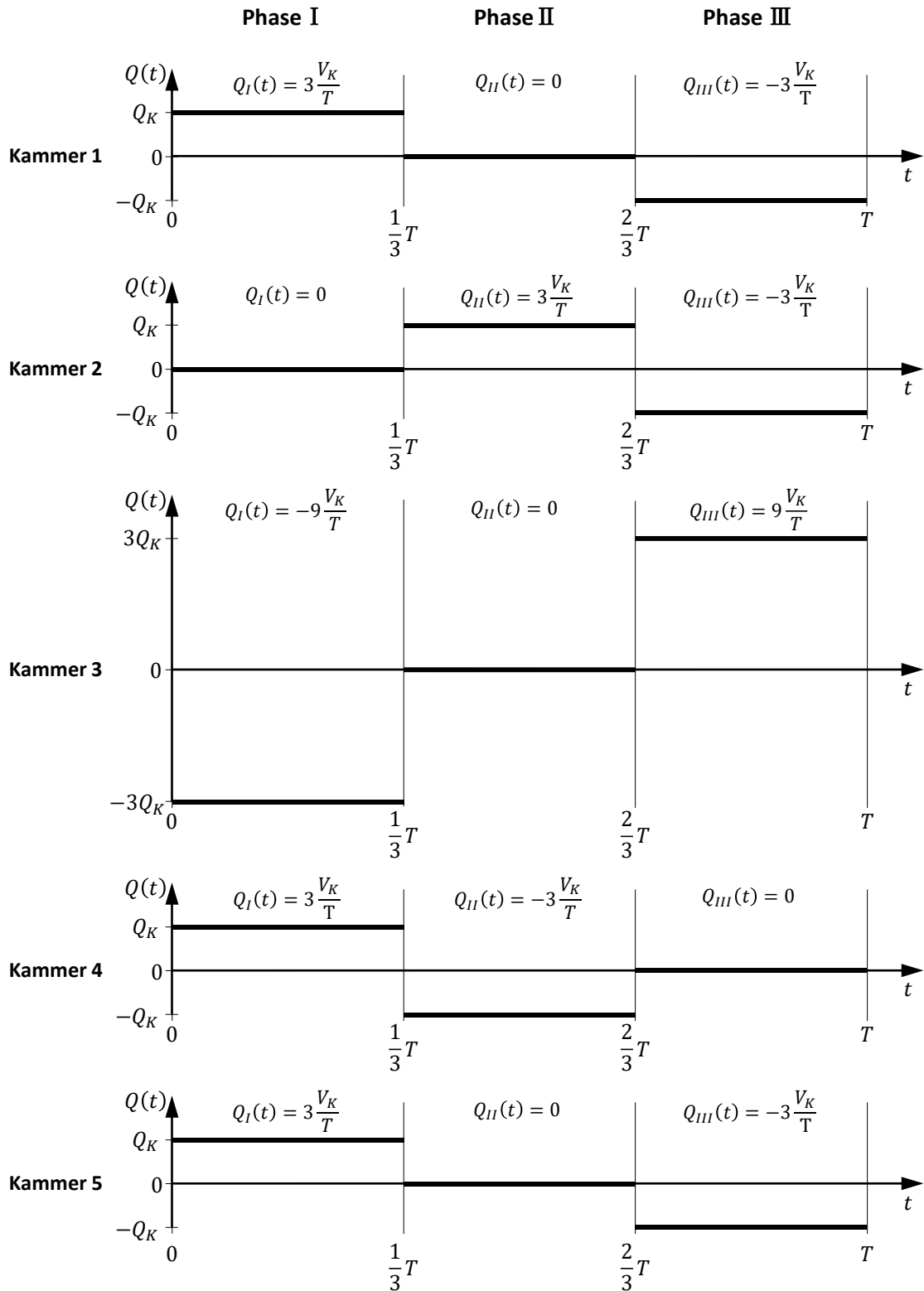


Abbildung 11: Schematische Darstellung der von den Kammern einer Pumpe nach (Feller & Schimmelpfennig 2010) erzeugten geometrischen Volumenströme  $Q(t)$ . Der maximale Volumenstrom  $Q_K$  hängt vom Arbeitsvolumens  $V_K$  der Kammer und der Periode  $T$  des Pumpzyklus ab.

## 4 Modellbildung

In Kapitel 3 wurde die fehlende Praxistauglichkeit des existierenden Ansatzes für pulsationsfreie lineare Schlauchpumpen gezeigt. Dennoch bietet die von Feller & Schimmelpfennig (2010) beschriebene Anordnung von fünf Pumpkammern einen geeigneten Ausgangspunkt für die Entwicklung pulsationsfrei arbeitender Schlauchpumpen. Im Folgenden wird darauf aufbauend das Modell für eine technisch realisierbare pulsationsfrei arbeitende lineare Schlauchpumpe entwickelt. Die Betrachtung der Pumpe erfolgt dabei anhand der in der Pumpe erzeugten geometrischen Volumenströme, aus welchen anschließend die erforderlichen zeitlichen Volumenänderungen der als „Kammern“ bezeichneten Arbeitsräume berechnet werden. Mit Hilfe eines zweiten Modells, welches den Zusammenhang zwischen Stößelhub und Arbeitsraumvolumen beschreibt, lassen sich daraus die für einen Pumpzyklus erforderlichen Stößelbewegungen berechnen.

### 4.1 Betrachtung der pumpeninternen geometrischen Teilvolumenströme

Für die pulsationsfreie Funktionsweise linearer Schlauchpumpen müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. **Pumpenein- und -ausgang sind zu jedem Zeitpunkt durch mindestens eine geschlossene Kammer fluidisch voneinander getrennt.**
2. **Die Summe der von den pumpenausgangsseitigen Arbeitsräumen erzeugten Teilvolumenströme muss zeitlich konstant sein.**
3. **Die in den Arbeitsräumen der Pumpe erzeugten Teilvolumenströme müssen einen ausnahmslos stetigen zeitlichen Verlauf aufweisen, sowohl während einer Phase, in den Phasenübergängen und auch in den Übergängen der Arbeitszyklen.**
4. **Die Pumpe soll sich für den „Kurzschlussbetrieb“ eignen. Dazu muss sie nicht nur einen kontinuierlichen pulsationsfreien Volumenstrom erzeugen, sondern einen gleich großen Volumenstrom am Pumpeneingang „aufnehmen“. Daher muss zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Summe aller  $N$  in der Pumpe erzeugten geometrischen Volumenströme Null sein:**

$$\sum_{K=1}^N \dot{V}_K(t) = 0$$

5. **Die Stetigkeit der zeitlichen Volumenänderung der Arbeitsräume muss innerhalb eines Arbeitszyklus  $T$  und darüber hinaus gewahrt sein. Für jeden Arbeitsraum (Kammer) der Pumpe muss gelten:**



$$\int_0^T \dot{V}(t) dt = 0$$

und

$$V(0) = V(T)$$

Bei der linearen Schlauchpumpe werden die Volumenänderungen der Arbeitsräume durch auf den Schlauch „drückende“ Stößel erzeugt. Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen dem zeitabhängigen Arbeitsraumvolumen  $V(t)$  und der Stößelbewegung  $h(t)$ . Die Pumpe ist unter kinematischen Aspekten daher so zu konzipieren, dass die Stößelbewegungen mit einem stetigen Geschwindigkeitsverlauf  $\dot{h}(t)$  und einem stetigen Beschleunigungsverlauf  $\ddot{h}(t)$  erfolgen. Daraus folgt die Bedingung:

- 6. Für jeden Arbeitsraum der Pumpe muss die Ableitung des erzeugten Teilvolumenstromes nach der Zeit  $\dot{Q}(t) = \ddot{V}(t)$  einen stetigen zeitlichen Verlauf aufweisen, sowohl während eines Arbeitszyklus als auch im Übergang zu dem darauffolgenden Arbeitszyklus.**

Abbildung 12 zeigt eine schematische Darstellung der pumpeninternen geometrischen Volumenströme, welche die zuvor genannten Bedingungen „1.“ bis „4.“ erfüllen. Um die spätere Handhabung zu erleichtern, sind die geometrischen Volumenströme  $Q(t)$  durch auf die Zeit normierte, einheitenlose Teilübertragungsfunktionen  $\dot{f}(x)$  beschrieben:

$$Q(t) = \dot{V}(t) \rightarrow \dot{f}(x)$$

Die TüF  $\dot{f}(x)$  besitzen einen Wertebereich von:  $0 \leq x \leq 1$ . Sie bilden das prinzipielle Verhalten des zu beschreibenden Systems Pumpe ab und lassen sich durch Skalieren in konkrete Teilübertragungsfunktionen  $Q(t)$  überführen.

Der in Abbildung 12 dargestellte Phasenplan setzt sich aus TüF der Form  $\dot{f}(x) = konst.$  und TüF der Form  $\dot{f}(x) \neq konst.$  zusammen. Jeweils zwei TüF  $\dot{f}(x) = konst.$  werden durch eine TüF  $\dot{f}(x) \neq konst.$  so verbunden, dass alle aneinandergereihten TüF einer Kammern einen durchgehend stetigen Verlauf aufweisen. In Analogie zur Getriebetechnik sorgen die TüF  $\dot{f}(x) \neq konst.$  für den stetigen Übergang zwischen zwei „Rastpositionen“. Im Folgenden werden die TüF  $\dot{f}(x) \neq konst.$  als Übergangsfunktionen bezeichnet.

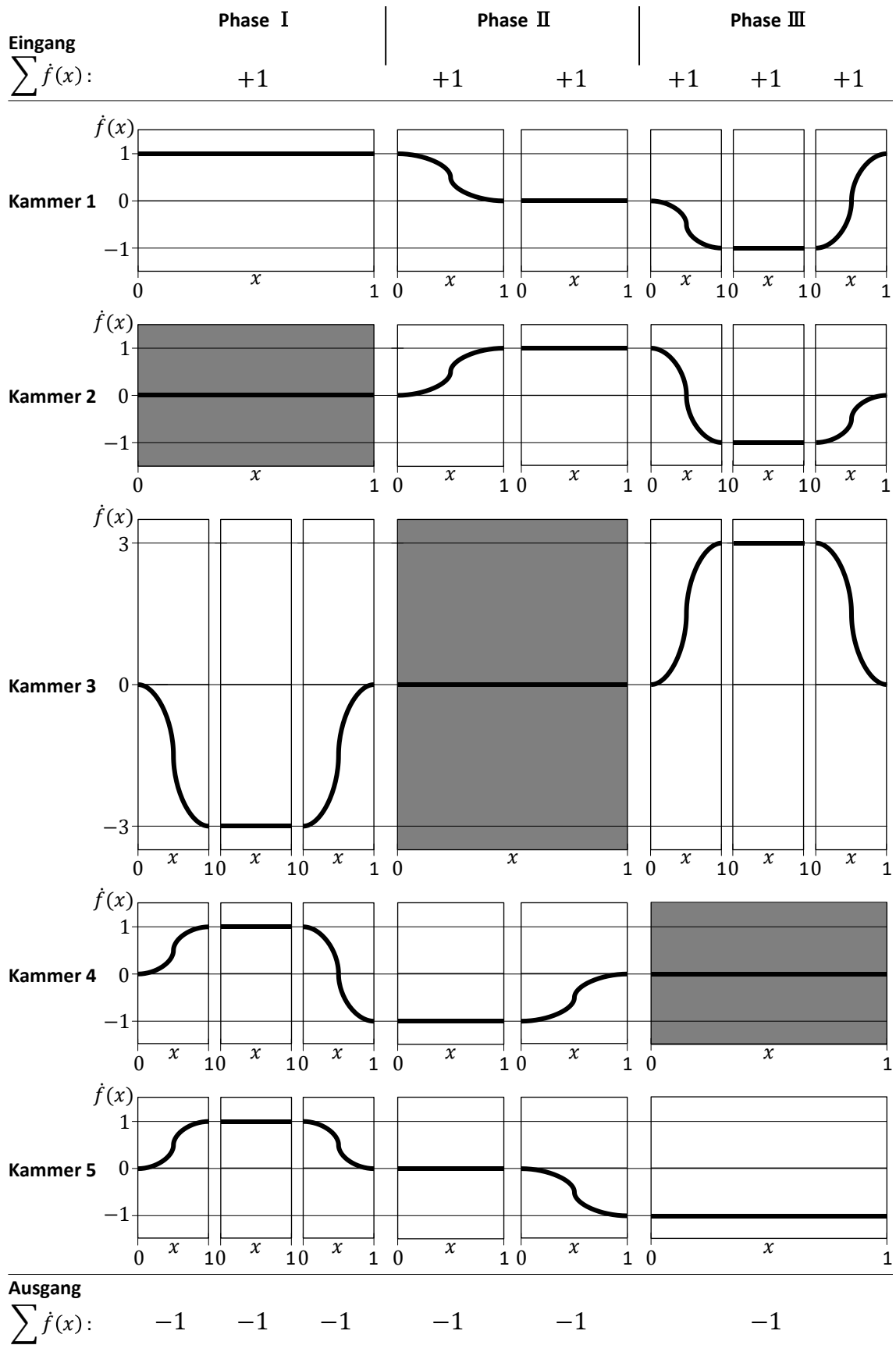


Abbildung 12: Schematische Darstellung der pumpeninternen geometrischen Volumenströme  $\dot{f}(x)$ . An jeder Stelle  $x$  ist die Summe aller pumpenausgangseitig gerichteten Volumenströme  $-1$  und aller pumpeneingangseitig gerichteten Volumenströme  $+1$ . Grau hinterlegt sind die Phasen, in denen die betreffende Kammer vollständig geschlossen ist.

### 4.1.1 Auswahl der Übergangsfunktionen

Aus der Getriebetechnik bekannte normierte Teilübertragungsfunktionen (kurz NÜF) für eine Rast-in-Rast Bewegung sind in Tabelle 1 dargestellt. Grundsätzlich eignen sich alle in der Tabelle enthaltenen NÜF  $f(z)$  als Übergangsfunktion.

Tabelle 1: Übersicht normierter symmetrischer Übertragungsfunktionen für die Rast-in-Rast Bewegung. Das Polynom 1. Grades ausgenommen, eignen sich prinzipiell alle dargestellten Funktionen  $f(z)$  als Übergangsfunktion  $\dot{f}(x)$ . Tabelle aus Volmer 1995, S. 156.

Bewegungsgesetz	Normierte Übertragungsfunktion	$f'(z)$	$f''(z)$	$f'''(z)$	$f'(z) \cdot f''(z)$
Gerade 1. Polynom 1. Potenz	$f(z) = z$				
quadratische Parabel 2. Polynom 2. Potenz	$z=0 \dots 0,5: f_1(z) = 2z^2$ $z=0,5 \dots 1: f_2(z) = 1 - 2(1-z)^2$				
kubische Parabel 2-3 Polynom 3. Potenz	$f(z) = 3z^2 - 2z^3$				
3-4 Polynom 4. Potenz	$z=0 \dots 0,5: f_1(z) = 8(z^3 - z^4)$ $z=0,5 \dots 1: f_2(z) = 1 - 8[(1-z)^3 - (1-z)^4]$				
3-4-5 Polynom 5. Potenz	$f(z) = 10z^3 - 15z^4 + 6z^5$				
3-4-5-6-7-8 Polynom 8. Potenz	$z=0 \dots 0,5: f_1(z) = \frac{8}{3}[7z^3 - 35z^4 + 112z^5 - 224z^6 + 256z^7 - 128z^8]$ $z=0,5 \dots 1: f_2(z) = 1 - \frac{8}{3}[7(1-z)^3 - 35(1-z)^4 + 112(1-z)^5 - 224(1-z)^6 + 256(1-z)^7 - 128(1-z)^8]$				
Sinuslinie (einfache Sinoide)	$f(z) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi z)]$				
Sinoide von Bestehorn	$f(z) = z - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi z)$				
Modifiziertes Beschleunigungs- trapez	$z=0 \dots \frac{1}{8}: f_1(z) = \frac{1}{2+\pi} [2z - \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi z)]$ $z=\frac{1}{8} \dots \frac{3}{8}: f_2(z) = \frac{1}{2+\pi} [\frac{1}{2} + 2z + 4\pi(z - \frac{1}{8})^2]$ $z=\frac{3}{8} \dots 0,5: f_3(z) = \frac{1}{2+\pi} [\frac{1}{2} + 2(1+\pi)z - \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi z - \pi)]$ $z=0,5 \dots 1: f_4(z) = 1 - f_1(1-z)$				
Modifizierte Sinoide	$z=0 \dots \frac{1}{8}: f_1(z) = \frac{1}{4+\pi} [\pi z - \frac{1}{4} \sin(4\pi z)]$ $z=\frac{1}{8} \dots \frac{7}{8}: f_2(z) = \frac{1}{4+\pi} [2 + \pi z - \frac{9}{4} \sin(\frac{4\pi}{3}z + \frac{\pi}{3})]$ $z=\frac{7}{8} \dots 1: f_3(z) = \frac{1}{4+\pi} [4 + \pi z - \frac{1}{4} \sin(4\pi z)]$				

Unter dem Aspekt kleinstmöglicher Extremwerte der TÜF  $\ddot{f}(x)$  würde sich die Verwendung von  $f(z) = z$  für die Übergangsfunktionen  $\dot{f}(x)$  anbieten. In diesem Fall würden allerdings die aneinandergereihten TÜF  $\dot{f}(x)$  keinen stetigen Verlauf in den Übergängen zwischen den TÜF aufweisen und dadurch wiederum die Übergänge zwischen den TÜF  $\ddot{f}(x)$  Werte von  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  annehmen (vgl. Tabelle 1,  $f''(z)$ ). In der Kinematik beschreibt die Funktion  $\ddot{f}(t)$  den

sogenannten „Ruck“. Je größer der Extremwert in der Ruckfunktion ist, desto mehr neigt ein mechanisches System zum Schwingen (Volmer 1995, S. 155). In Anbetracht dessen ist die NÜF  $f(z) = z$  für die Übergangsfunktionen ungeeignet. Da die Priorität bei der Wahl der NÜF auf minimalen Werten für  $f'(z)$  liegt, wird im Folgenden die Funktion der kubischen Parabel  $f(z) = 3z^2 - 2z^3$  für die Übergangsfunktionen verwendet. Diese besitzt von den in Tabelle 1 enthaltenen Funktionen, mit ausschließlich endlichen Funktionswerten in  $f''(z)$  (endlicher Ruck in  $\ddot{f}(x)$ ), den geringsten Extremwert in  $f'(z)$ . Die Grafen dieser kubischen Parabel, sowie deren Stammfunktion und erster Ableitung sind in Abbildung 13 dargestellt.

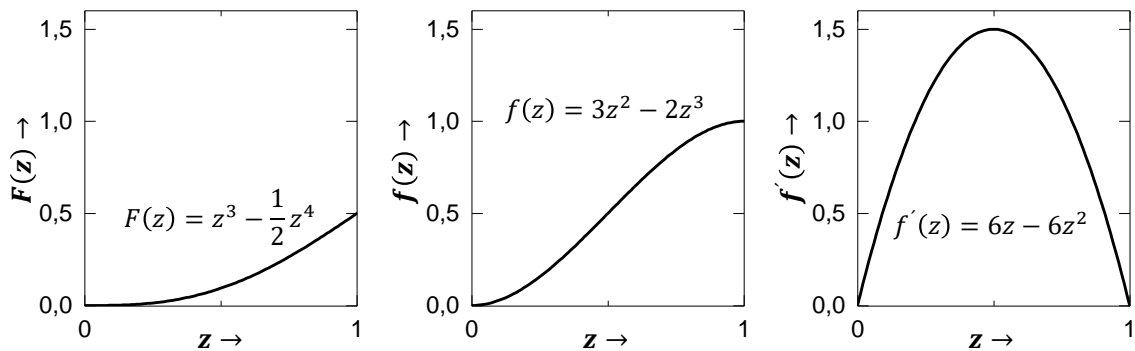


Abbildung 13: Verlauf der für die Übergangsfunktionen verwendeten kubischen Parabel (Mitte) sowie deren Stammfunktion (links) und erste Ableitung (rechts) im Bereich  $0 \leq z \leq 1$ .

Das Einsetzen von  $f(z)$  in  $\dot{f}(x)$  erfolgt unter Verwendung eines Vorfaktors  $W$  und Offsets  $O$  in der Form  $\dot{f}(x) = W \cdot f(z) + O$  und anschließender Substitution  $z \rightarrow x$ . In Abbildung 14 ist dies am Beispiel der Kammer 1 gezeigt.

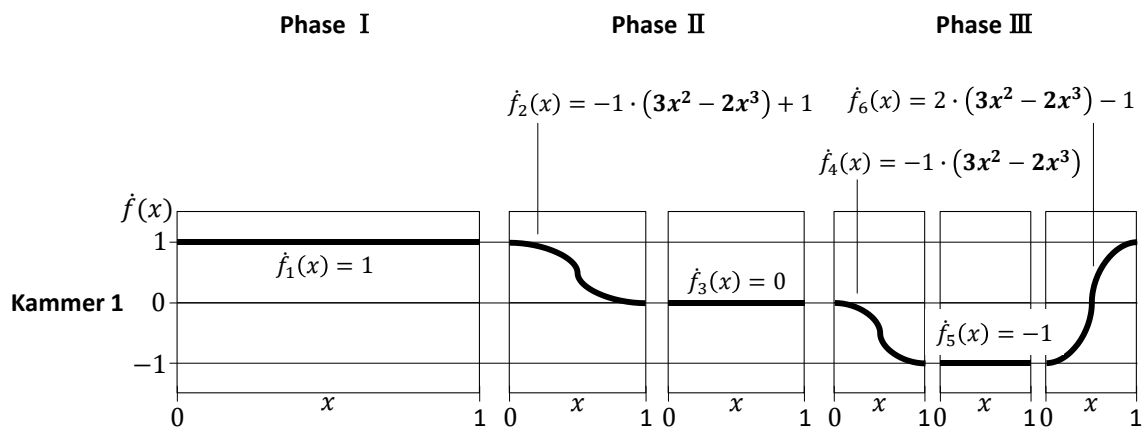


Abbildung 14: Beispiel der Verwendung der NÜF  $3z^2 - 2z^3$  mit  $z \rightarrow x$  für die Übergangsfunktionen im Phasenplan der Kammer 1.

Die Entwicklung des Pumpenmodells auf Basis der Funktion  $f(z) = 3z^2 - 2z^3$  erfolgt exemplarisch. Bei Verwendung einer anderen Funktion  $f(z)$  ist die im Folgenden vorgestellte Modellbildung identisch. Es ändert sich dadurch lediglich die „Ausprägung“ der im Modell enthaltenen Parameter.

#### 4.1.2 Parametrisierung des Phasenplanes

Zur Beschreibung des Phasenanteils  $a_i$  der TüF  $\dot{f}_i(x)$  werden für die Übergangsfunktionen die in Abbildung 15 dargestellten Parameter  $s_{P,i}$  mit dem Wertebereich gilt  $0 < s_{P,i} \leq 1$  eingeführt. Der Index  $P$  kodiert die Phase und  $i$  entspricht dem Index der betreffenden TüF  $\dot{f}_i(x)$ . Bei  $s_{P,i} = 1$  füllt die betreffende Funktion die gesamte Phase aus. Im Fall von  $s_{P,i} = 0$  hätte die betreffende Funktion keinen Anteil an der Phase, wodurch die Kontinuität, der durch diese Übergangsfunktion verbundenen TüF  $\dot{f}_i(x) = konst.$ , nicht mehr gegeben wäre.

Für den Phasenanteil  $a_i$  der TüF  $\dot{f}_i(x) = konst.$  gilt innerhalb einer Phase  $P$ :

$$a_i = 1 - \sum_i s_{P,i}$$

Im Gegensatz zu den Übergangsfunktionen darf der Phasenanteil der TüF  $\dot{f}_i(x) = konst.$  auch den Wert Null annehmen. Die Summe der Anteile  $a_i$  aller in einer Phase enthalten TüF muss stets eins sein.

Damit die Volumenstrombilanz zu jedem Zeitpunkt ausgeglichen ist (Bedingung „2.“ und „4.“) muss die von einer Übergangsfunktion erzeugte Abweichung vom konstanten Volumenstrom einer Kammer durch mindestens eine, zeitgleich angeordnete, gegenläufige Übergangsfunktion desselben Typs in einer anderen Kammer kompensiert werden. Daraus folgt, dass  $s_{P,i}$  für die im Phasenplan zeitgleich auftretenden Übergangsfunktionen unterschiedlicher Kammern gleich groß sein muss. In Abbildung 15 ist der um die Parameter  $s_{P,i}$  erweiterte Phasenplan dargestellt.

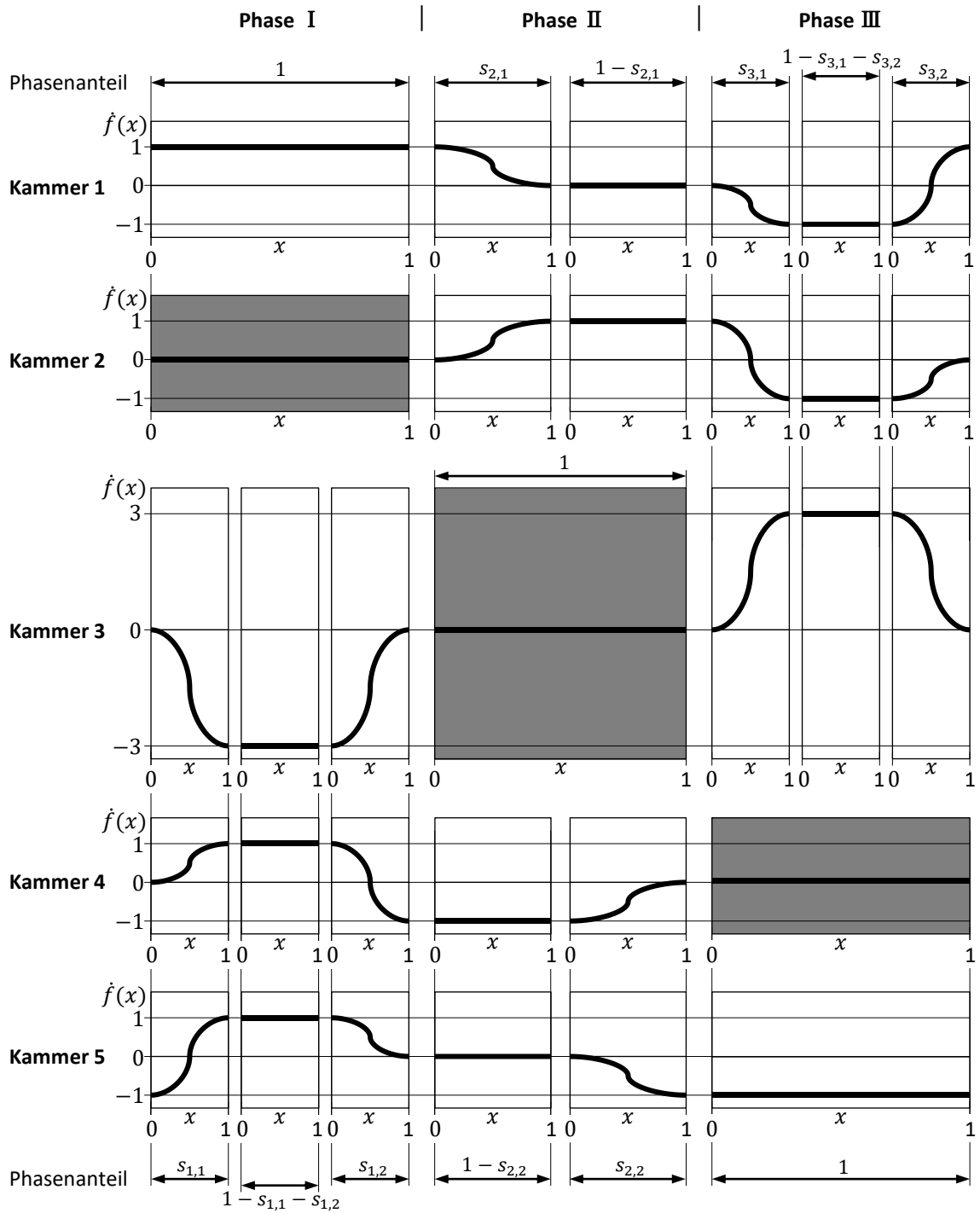


Abbildung 15: Phasenplan  $\dot{f}(x)$  mit Berücksichtigung der Phasenanteile  $s_{p,i}$  der Übergangsfunktionen. Grau hinterlegt sind die Phasen, in denen die betreffende Kammer vollständig geschlossen ist.

Um von den TUF  $\dot{f}(x)$  die höhere Ordnung  $f(x)$  oder niedrigere Ordnung  $\ddot{f}(x)$  zu berechnen, muss der Anteil  $a_i$  der betreffenden TUF an der Phase berücksichtigt werden. Dabei gilt:

$$f_i(x) = a_i \int \dot{f}_i(x) dx \quad (1)$$

(siehe A1)

und

$$\ddot{f}_i(x) = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{\dot{f}_i(x)}{dx} \quad (2)$$

(siehe A2)

Die Lösung von  $\int \dot{f}_i(x) dx$  beinhaltet eine zunächst unbekannte Integrationskonstante  $C_i$  welche durch eine Randbedingung zu definieren ist. Diese Randbedingung ist durch die Bedingung „5.“ gegeben, gemäß welcher alle aneinandergereihten TUF  $f_i(x)$  einer Kammer einen stetigen Verlauf aufweisen müssen:

$$f_i(1) = f_{i+1}(0) \quad (3)$$

Der stetige Verlauf der TUF  $f_i(x)$  schließt mit ein, dass Anfang und Ende des Phasenplanes übereinstimmen, so dass außerdem gelten muss:

$$f_{i=1}(0) = f_{i=n}(1) \quad (4)$$

Für den in Abbildung 15 dargestellten Phasenplan ist (4) ausschließlich dann erfüllt, wenn für alle Parameter  $s_{P,i} = 0$  gilt (siehe A3).

Um (4) für Parameter  $0 < s_{P,i} \leq 1$  zu erfüllen, werden zusätzliche Freiheitsgrade, in Form der Parameter  $q_K$  in den Phasenplan  $\dot{f}(x)$  eingeführt. Die Parameter  $q_K$  repräsentieren einen von eins abweichenden Volumenstrom der betreffenden Kammer  $K$ , durch welchen die Bedingung „5.“ des auch zwischen den Arbeitszyklen stetigen Verlaufs der Volumenänderung vollständig erfüllt wird. Der um  $q_K$  erweiterte Phasenplan ist in Abbildung 16 dargestellt.

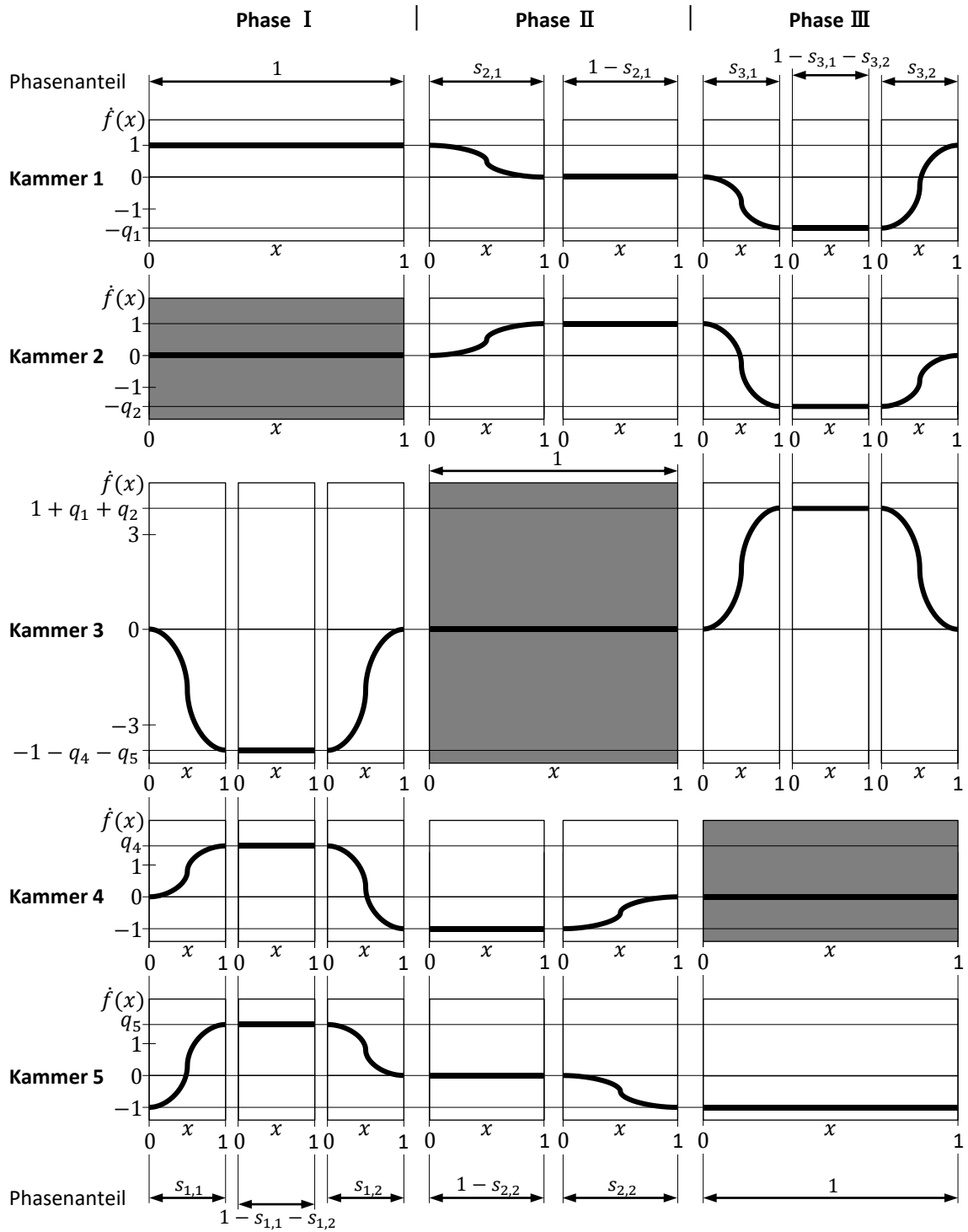


Abbildung 16: Schematische Darstellung des um  $q_K$  erweiterten parametrischen Phasenplanes  $\hat{f}(x)$ . Grau hinterlegt sind die Phasen, in denen die betreffende Kammer vollständig geschlossen ist.



Der Parameterraum von zunächst sechs Parametern  $s_{p,i}$  und vier Parametern  $q_K$  lässt sich anhand von zusätzlichen Festlegungen auf jeweils zwei Parameter  $s_P$  und  $q_K$  reduzieren. Da gemäß der zu Beginn formulierten Bedingung „4.“ der pumpeneingangsseitige Volumenstrom zu jedem Zeitpunkt genauso groß sein soll wie der pumpenausgangsseitige Volumenstrom (Möglichkeit zum Kurzschlussbetrieb) wird eine „Symmetriebedingung“ eingeführt. Gemäß dieser sollen für die Kammern 1 und 5 beziehungsweise 2 und 4 gleiche Parameter  $q_K$  gelten:

$$q_1 = q_5$$

$$q_2 = q_4$$

Da die Größe von  $q_K$  von den Phasenanteilen  $s_{p,i}$  abhängt, soll außerdem gelten:

$$s_{2,2} = s_{2,1}$$

$$s_{1,2} = s_{3,1}$$

$$s_{1,1} = s_{3,2}$$

Aufgrund dieser Symmetriebedingung kann im Folgenden die Betrachtung der Pumpe auf den „halben Phasenplan“ beschränkt werden. Die Teilung des Phasenplanes erfolgt in den Phasen der vollständig geschlossenen Kammern 2 bis 4 (vgl. Abbildung 17). Erfüllt die eine Hälfte des Phasenplanes die Bedingung der Pulsationsfreiheit, so wird diese zwangsläufig von der anderen Hälfte in gleicher Weise erfüllt. Der Vorteil davon ist die Minimierung des steuerungstechnischen Aufwandes der Pumpe.

Die letzte Vereinfachung besteht darin, dass alle in einer Phase vorkommenden Übergangsfunktionen den gleichen Anteil an dieser Phase besitzen sollen. Dadurch entfällt der Index  $i$  und es gilt:

$$s_{p,2} = s_{p,1} = s_P$$

Die Vereinfachung, gemäß welcher der Phasenanteil aller Übergangsfunktionen identisch sein soll ( $s_{p,i} = s$ ) erfolgt nicht. Auf die Effekte phasenspezifischer Phasenanteile wird später ausführlicher eingegangen.

Der Phasenplan mit den reduzierten Parametersatz ist in Abbildung 17 dargestellt. Die Indizierung von  $s_P$  und  $q_K$  erfolgt anhand deren erstmaligen Vorkommens (Kammer 1, Kammer 2) im Phasenplan. Der Parameter  $s_2$  besitzt den Wertebereich  $0 < s_2 \leq 1$ . Da in der Phase III bei den Kammern 1, 2 und 3 zwei Übergangsfunktionen vorkommen, besitzt der Parameter  $s_3$  den Wertebereich  $0 < s_3 \leq 0,5$ . Die TUF  $\dot{f}_i(x)$  des in Abbildung 17 schematisch dargestellten Phasenplans sind in A4 und die mit ( 1 ) berechneten TUF  $f_i(x)$  in A5 hinterlegt.

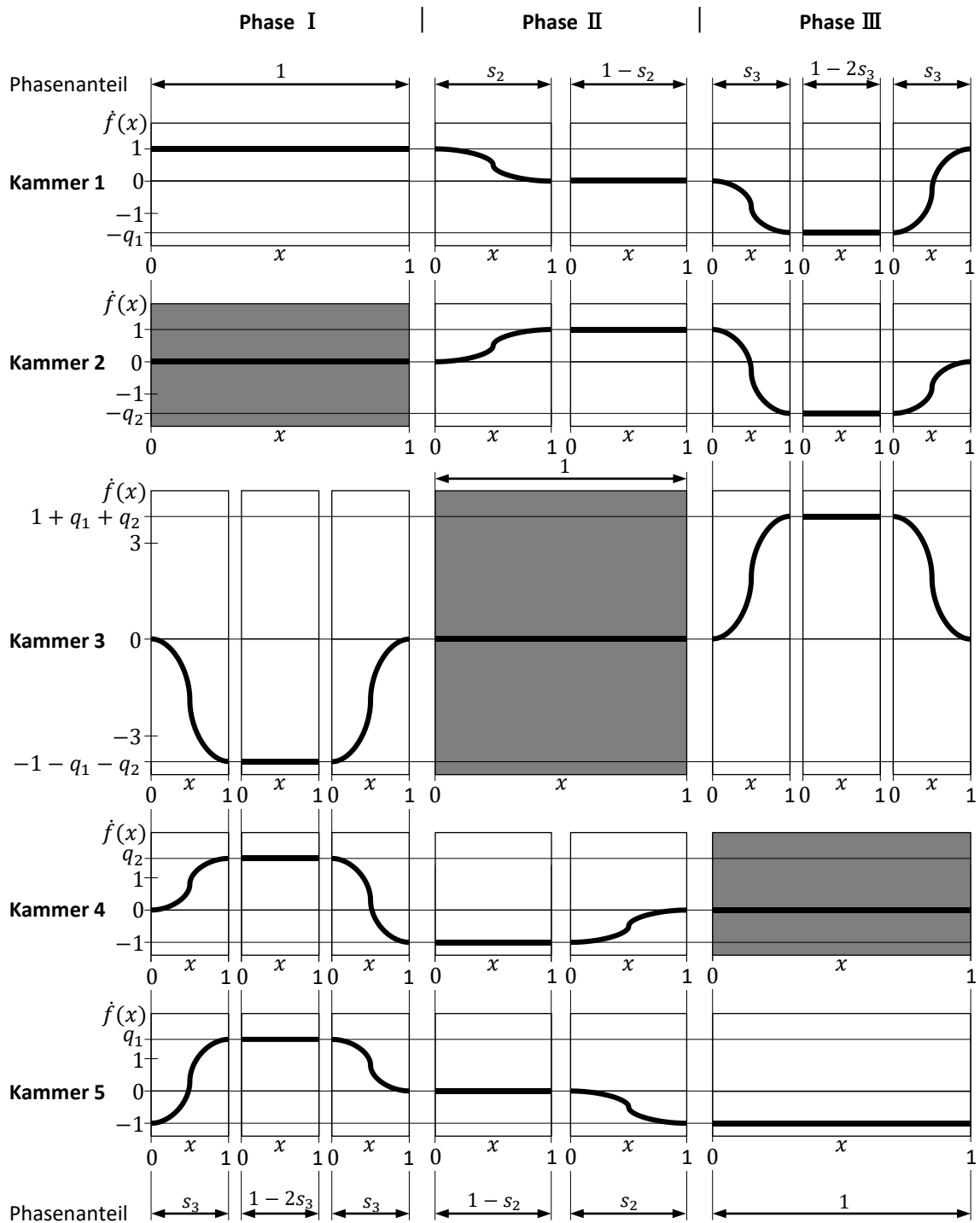


Abbildung 17: Phasenplan mit reduziertem Parametersatz. Für die vollständige Beschreibung genügen nun die Parameter  $s_2$ ,  $s_3$  sowie  $q_1$  und  $q_2$ . Die Phasen in denen eine Kammer vollständig geschlossen ist, sind grau gekennzeichnet.

Basierend auf der Bedingung „5.“, gemäß welcher die aneinandergereihten TUF  $f_i(x)$  einer Kammer einen kontinuierlichen Verlauf aufweisen ( 3 ) und der Endpunkt von Phase III mit dem Startpunkt von Phase I übereinstimmt ( 4 ), lassen sich  $q_1$  und  $q_2$  als Funktionen von  $s_2$  und  $s_3$  formulieren:

$$q_1 = \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (5)$$

$$q_2 = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (6)$$

(siehe A6)

Die Abhängigkeit von  $q_1$  und  $q_2$  von  $s_2$  und  $s_3$  ist in Abbildung 18 dargestellt. Mit zunehmendem  $s_2$  verringert sich  $q_2$  in jenem Maß, in welchem  $q_1$  zunimmt. Im Gegensatz dazu nehmen mit  $s_3$  sowohl  $q_1$  als auch  $q_2$  zu. Nur für den Fall  $s_2 = s_3 = 0$  würde  $q_1 = q_2 = 1$  gelten.

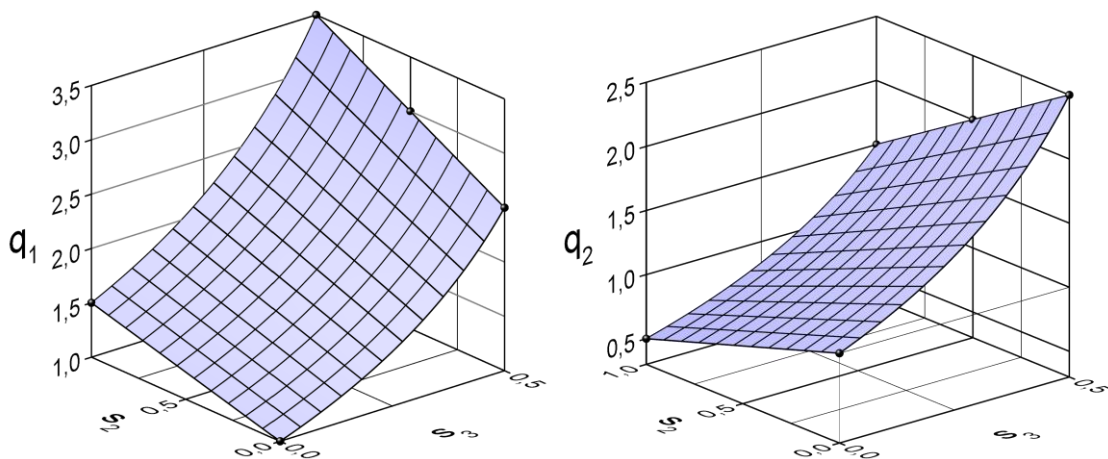


Abbildung 18: Darstellung von  $q_1$  und  $q_2$  in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$ . Der Fall  $s_2 = s_3 = 0$  entspricht dem ursprünglichen Phasenplan. Im Fall  $s_2 = 1, s_3 = 0,5$  erstrecken sich die Übergangsfunktionen über die gesamte Phase.

Der von  $q_1$  und  $q_2$  abhängige maximale Volumenstrom von Kammer 3 ist in Abbildung 19 dargestellt. Für diesen gilt:

$$q_1 + q_2 + 1 = \frac{3}{1 - s_3} \quad (7)$$

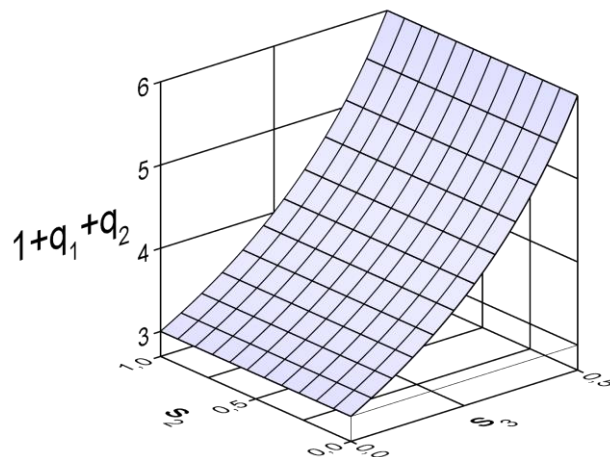


Abbildung 19: Darstellung des maximalen Volumenstromes  $1 + q_1 + q_2$  der Kammer 3. Infolge der Addition von  $q_1$  und  $q_2$  entfällt der Einfluss des Parameters  $s_2$ , und der maximale Volumenstrom wird ausschließlich durch den Parameter  $s_3$  bestimmt.

### 4.1.3 Die Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$

Der Phasenplan in Abbildung 20 zeigt schematisch die durch die TÜF  $f_i(x)$  (siehe A5) beschriebenen Veränderung der Arbeitsvolumina der Kammern während eines Arbeitszyklus.

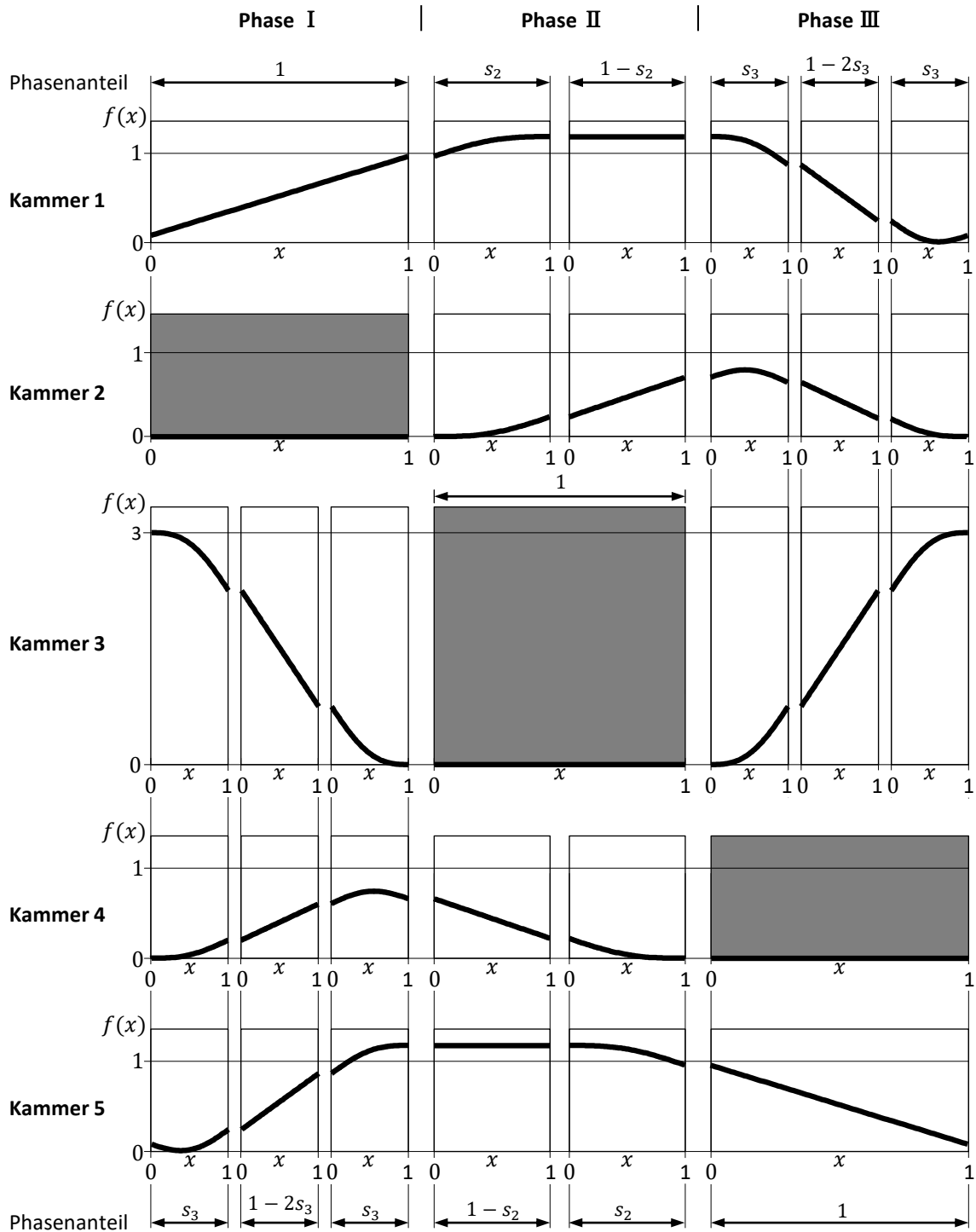


Abbildung 20: Schematische Darstellung der TÜF  $f_i(x)$ , welche die Veränderung Arbeitsvolumina während eines Arbeitszyklus beschreiben. Die Phasen, in denen eine Kammer vollständig geschlossen ist, sind grau gekennzeichnet. Die Funktionen der TÜF  $f_i(x)$  sind in A5 hinterlegt.

Für die Kammern 2, 3 und 4 existiert ein von  $s_2$  und  $s_3$  unabhängiger Zustand der Form  $f_i(x) = 0$ . Dieser liegt jeweils dann vor, wenn die betreffende Kammer dicht geschlossen ist.

Ausgehend von diesem definierten Zustand lassen sich alle Integrationskonstanten  $C_i$  eindeutig bestimmen. Im Gegensatz dazu existiert für die Kammern 1 und 5 kein von  $s_2$  und  $s_3$  unabhängiger Zustand. Der Zustand „Kammervolumen gleich Null“ tritt für beide Kammern in dem Punkt im Phasenplan auf, in dem die entsprechende TUF  $\dot{f}_i(x)$  (vgl. Abbildung 17) eine Nullstelle besitzt. Daher enthalten die TUF  $f_i(x)$  der Kammern 1 und 5 die zunächst noch unbekannte Integrationskonstante  $C_1$ , welche den Startpunkt  $f_1(0) = C_1$  der Phase I kennzeichnet (vgl. ( 238 ) in A9).

#### 4.1.4 Kammergrößenverteilung

Die TUF  $f_i(x)$  beschreiben die Veränderung des Arbeitsvolumens im Verlauf eines Arbeitszyklus. Folglich lässt sich über die Maxima der TUF  $f_i(x)$  das Größenverhältnis der Kammern zueinander berechnen. Anhand der in Abbildung 20 dargestellten Verläufe der TUF  $f_i(x)$  sind die Stellen im Phasenplan ersichtlich, an denen die Arbeitsvolumina der Kammern ihr Maximum aufweisen:

Kammer 1:  $f_3(x) = \textit{konstant}$

Kammer 2:  $f_4(x_0), \dot{f}_4(x_0) = 0$

Kammer 3:  $f_1(0)$

Kammer 4:  $f_3(x_0), \dot{f}_3(x_0) = 0$

Kammer 5:  $f_4(x) = \textit{konstant}$

Da gemäß der in Kapitel 4.1.2 festgelegten Symmetriebedingung die Kammern 1 und 5 sowie 2 und 4 den gleichen Maximalwert in  $f_i(x)$  besitzen müssen, beschränkt sich die Betrachtung im Folgenden auf die Kammern 1, 2 und 3.

Bei den Kammern 1 und 2 ist das Maximum in  $f_i(x)$  über einen von  $s_2$  und  $s_3$  abhängigen Extremwert zu berechnen. Die Bestimmung dieses Extremwertes erfordert bei beiden Kammern die Nullstellenberechnung der korrespondierenden TUF  $\dot{f}_i(x)$ . Für Kammer 1 lässt sich mit der Nullstelle  $x_0$  der TUF  $\dot{f}_6(x)$  der bis dahin noch unbekannte Wert der Integrationskonstanten  $C_1$  an der Stelle  $f_6(x_0) = 0$  berechnen und damit auch das Maximum des Arbeitsvolumens an der Stelle  $f_3(C_1) = \textit{konstant}$ . Für Kammer 2 lässt sich mit der Nullstelle  $x_0$  der TUF  $\dot{f}_4(x)$  das Maximum des Arbeitsvolumens an der Stelle  $f_4(x_0)$  berechnen. In Abbildung 21 sind die Maxima in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$  dargestellt. Die für diskrete Werte  $s_2, s_3$  berechneten Nullstellen und maximalen Arbeitsvolumina sind in A7 hinterlegt.

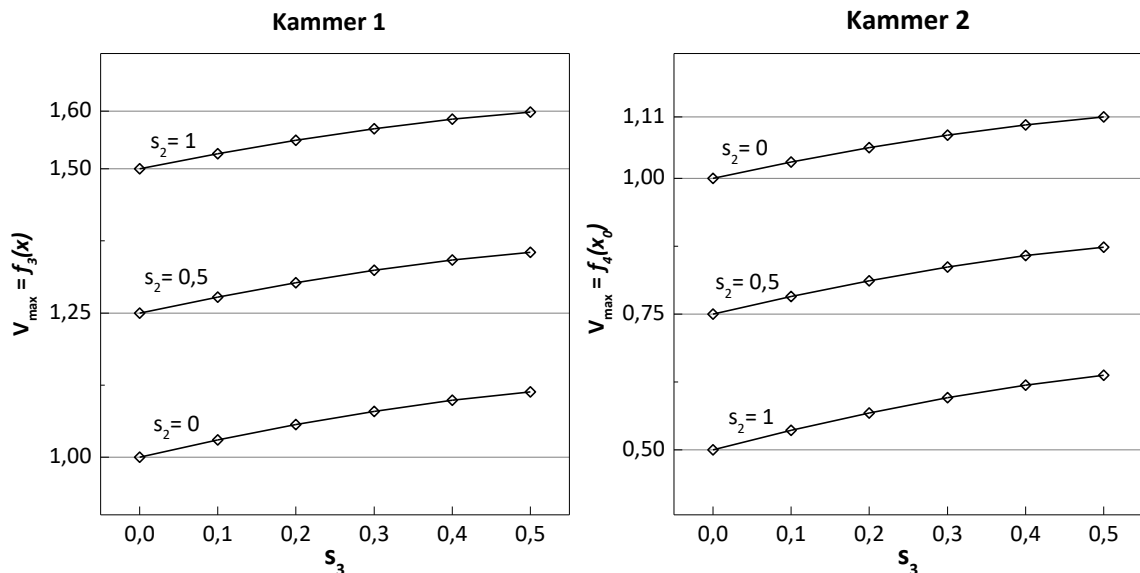


Abbildung 21: Darstellung der Maxima der „Arbeitsvolumina“ der Kammern 1 und 2 in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$ .

Die maximalen Volumina repräsentieren die benötigten Kammergrößen.

Kammer 1 nimmt infolge der Übergangsfunktion  $\dot{f}_2(x)$  zu Beginn der Phase II Volumen auf, während sich zeitgleich die Volumenaufnahme von Kammer 2 verlangsamt, sodass mit größer werdendem  $s_2$  das Maximum des Arbeitsvolumens der Kammer 1 zunimmt und der Kammer 2 im gleichen Maße abnimmt.

Durch den Parameter  $s_3$  vergrößert sich das Maximum des Arbeitsvolumens beider Kammern. Bei  $s_3 > 0$  findet in Phase III bei beiden Kammern eine Förderrichtungsumkehr statt (vgl.  $\dot{f}_6(x)$  von Kammer 1 und  $\dot{f}_4(x)$  von Kammer 2). Anstatt nur auszustoßen, nehmen beide Kammern zeitweise auch Volumen auf, welches zusätzlich zu dem während der Phasen I und II angesaugten Volumen von den Kammern „gepuffert“ werden muss. Für den Sonderfall  $s_2 = 0$ ,  $s_3 > 0$  wäre der Effekt von  $s_3$  auf beide Kammern identisch und das benötigte Volumen beider Kammern gleich, da in diesem Fall  $q_1 = q_2$  gilt (vgl. ( 5 ) und ( 6 )). Für  $s_2 > 0$  ist der Effekt von  $s_3$  auf beiden Kammern unterschiedlich, da dann  $q_1 \neq q_2$  gilt.

Wie dem Phasenplan aus Abbildung 20 zu entnehmen, tritt bei Kammer 3 das Maximum des Arbeitsvolumens bei  $f_1(0)$  auf.

Für

$$f_1(0) = (1 - s_3) \cdot (1 + q_1 + q_2) \quad (8)$$

(vgl. ( 274 ) in A9)

folgt mit ( 5 ) und ( 6 )

$$f_1(0) = 3 \quad (9)$$

Demnach ist das Maximum des Arbeitsvolumens der Kammer 3 unabhängig von den Parametern  $s_2$  und  $s_3$ .

In Abbildung 22 sind die Maxima der Arbeitsvolumina der Kammern 1 und 2 in Abhängigkeit des prozentualen Anteils der Übergangsfunktionen an der Phase dargestellt. Ein Anteil von 0 % entspräche dem Fall  $s_2 = s_3 = 0$ . Bei einem Anteil von 100 % erstrecken sich die Übergangsfunktionen über die gesamte Phase. Da in Phase III zwei Übergangsfunktionen enthalten sind, gilt  $s_2 = 2 \cdot s_3$ . So bedeutet zum Beispiel ein Anteil von 50 %:  $s_2 = 0,5$  und  $s_3 = 0,25$  oder ein Anteil von 100 %:  $s_2 = 1$  und  $s_3 = 0,5$ .

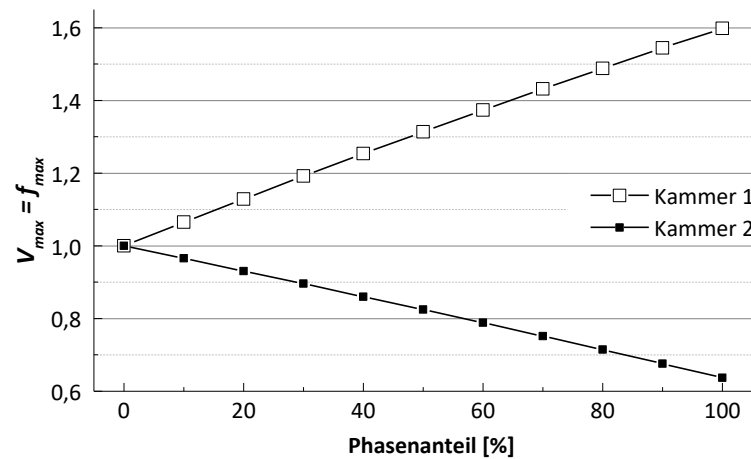


Abbildung 22: Darstellung der Maxima der Arbeitsvolumina der Kammern in Abhängigkeit des Phasenanteils der Übergangsfunktionen.

Die Maxima der Arbeitsvolumina der Kammer beschreiben die Größenverteilung der Kammer untereinander. Für einen Phasenanteil der Übergangsfunktionen von 0 % ist die resultierende Kammergrößenverteilung 1 : 1 : 3 : 1 : 1. Bei dem anderen Extrem, einem Phasenanteil von 100 %, ist resultierende Kammergrößenverteilung 1,6 : 0,6 : 3 : 0,6 : 1,6.

#### 4.1.5 Die Teilübertragungsfunktionen $\ddot{f}_i(x)$

Abbildung 23 zeigt schematisch den Verlauf der TUF  $\ddot{f}_i(x)$ . Die gemäß ( 2 ) berechneten TUF  $\ddot{f}_i(x)$  sowie deren Extremwerte sind in A7 hinterlegt.

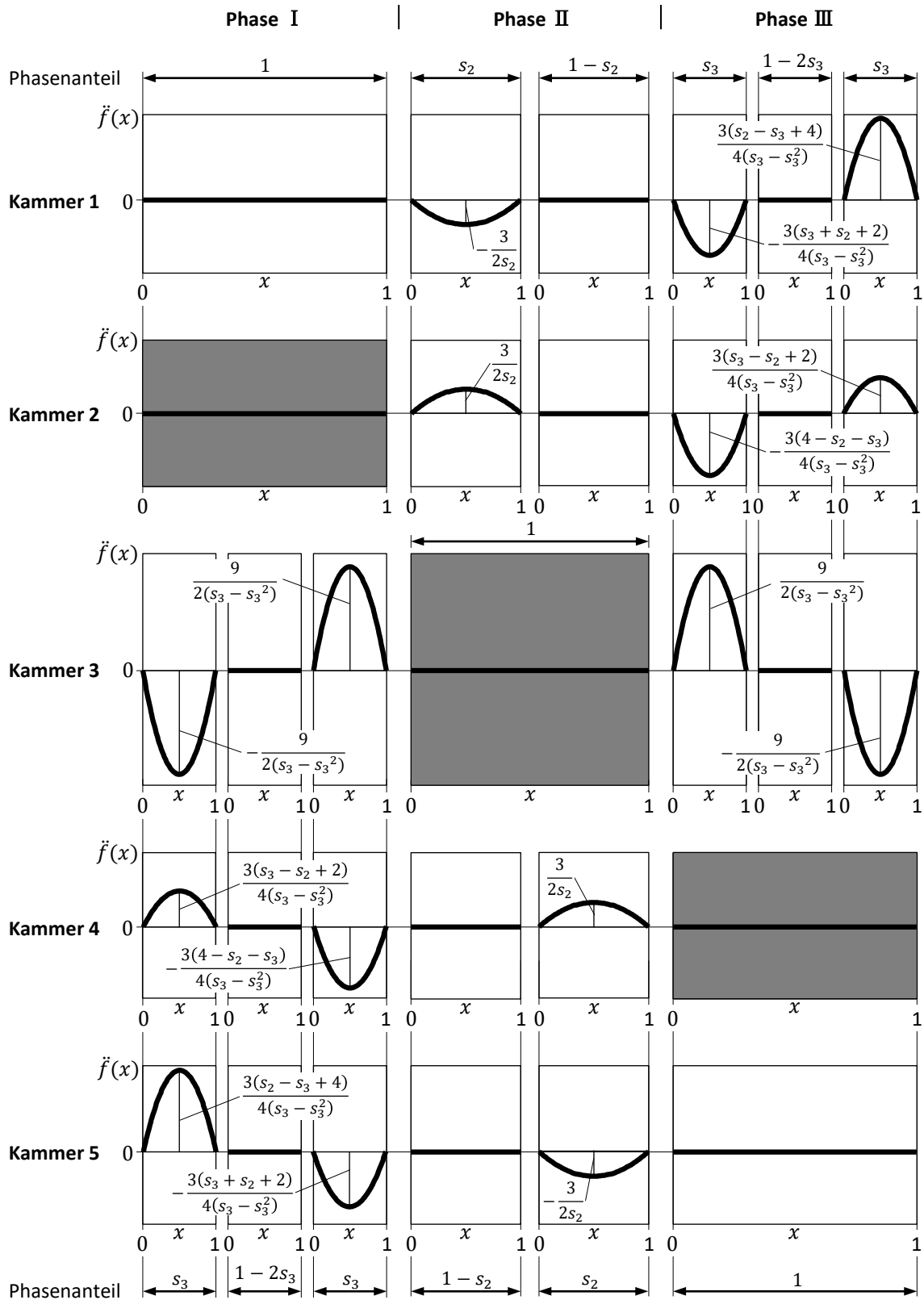


Abbildung 23: Schematische Darstellung der TUF  $\ddot{f}_i(x)$ . Die Phasen in denen eine Kammer vollständig geschlossen ist, sind grau gekennzeichnet. Die Funktionen der TUF  $\ddot{f}_i(x)$  sind in A7 hinterlegt.



Im Folgenden werden die von  $s_2$  und  $s_3$  abhängigen Extrema der TUF  $\ddot{f}_i(x)$  betrachtet. Insbesondere im Hinblick auf die spätere mechanische Betätigung der Kammern sind betragsmäßig kleine Werte der TUF  $\ddot{f}_i(x)$  anzustreben. Die folgende Betrachtung beschränkt sich wieder auf die Kammern 1 bis 3.

Während der Phase I erzeugt Kammer 1 einen konstanten Volumenstrom und Kammer 2 bleibt geschlossen, so dass für beide Kammern  $\ddot{f}_1(x) = 0$  gilt.

In Phase II besteht für beide Kammern ein von  $s_2$  abhängiger Extremwert der Form:

$$|\ddot{f}_{2,max}| = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2} \quad (10)$$

(vgl. ( 164 ) und ( 179 ), A7)

Der Betrag von  $\ddot{f}_{2,max}$  ist für beide Kammern identisch, die Richtung jedoch in Folge der gegenläufigen TUF  $\dot{f}_2(x)$  entgegengesetzt. Mit zunehmendem Phasenanteil  $s_2$  verringert sich  $|\ddot{f}_{2,max}|$  und ist dann am geringsten, wenn sich die Übergangsfunktion über die gesamte Phase ( $s_2 = 1$ ) erstreckt. Abbildung 24 zeigt den von  $s_2$  abhängigen Verlauf  $\ddot{f}_{2,max}$  beider Kammern.

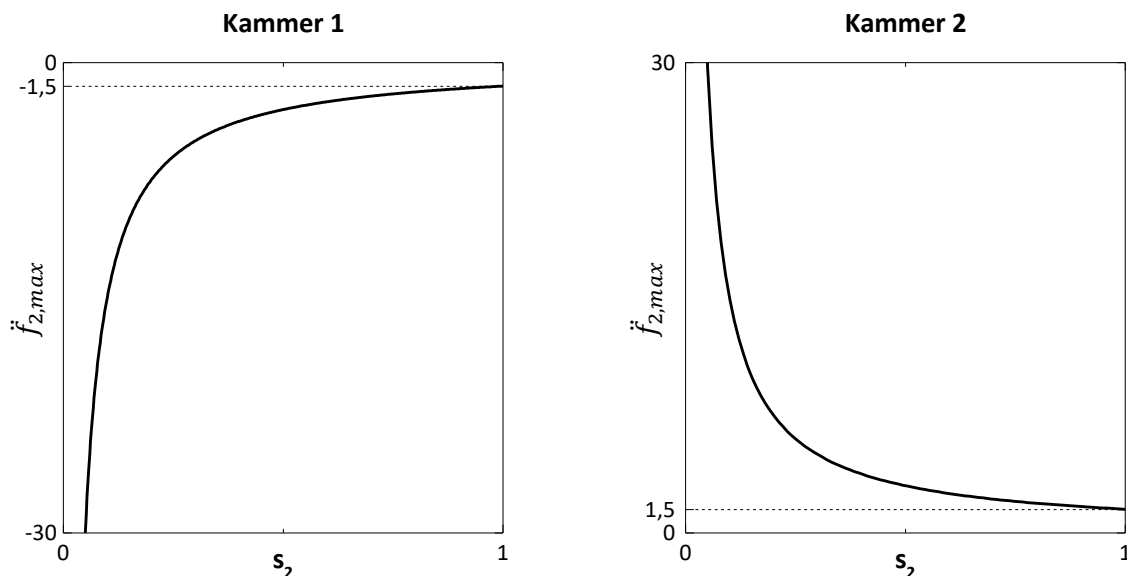


Abbildung 24: Darstellung der Extrema von  $\ddot{f}_2(x)$  in Abhängigkeit von  $s_2$  für  $0 < s_2 \leq 1$ . Für  $s_2 = 0$  ist  $|\ddot{f}_{2,max}|$  unendlich groß.

In Phase III sind die Kammern 1 bis 3 aktiv und in jeder Kammer weisen die TUF  $\ddot{f}_i(x)$  individuelle Extremwerte auf. Im Gegensatz zu Phase II sind in Phase III die TUF  $\ddot{f}_i(x)$  der Kammer 1 und 2 gleich gerichtet. Die TUF  $\ddot{f}_i(x)$  der Kammer 3 sind den TUF  $\ddot{f}_i(x)$  der Kammern 1 und 2 entgegengerichtet, so dass die Summe aller TUF  $\ddot{f}_i(x)$  zu jedem Zeitpunkt Null ist. Bei der Kammer 3 sind die Extremwerte der TUF  $\ddot{f}_i(x)$  ausschließlich von  $s_3$  abhängig (vgl. Abbildung 23). Diese Abhängigkeit ist in Abbildung 25 dargestellt.

Für alle Extrema der TÜF  $\ddot{f}_i(x)$  der Kammer 3 gilt:

$$|\ddot{f}_{i,max}| = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s_3 - s_3^2} \quad (11)$$

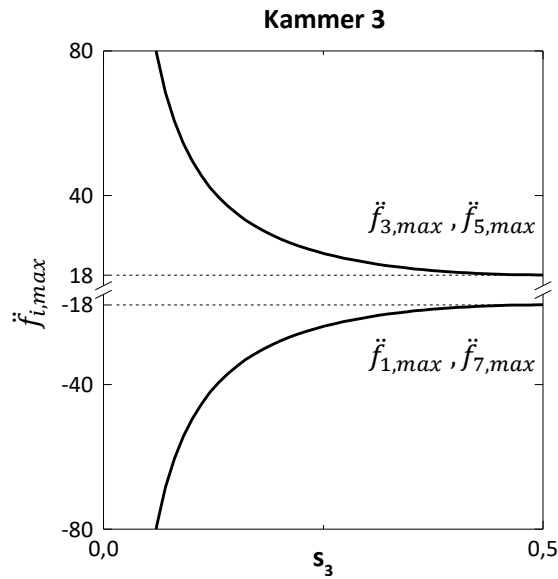


Abbildung 25: Darstellung der Extrema in  $\ddot{f}_i(x)$  der Kammer 3 in Abhängigkeit von  $s_3$ . Für  $s_3 = 0$  wäre auch hier  $|\ddot{f}_{i,max}(x)|$  unendlich groß.

In Abbildung 26 sind die Extremwerte der TÜF  $\ddot{f}_i(x)$  von den Kammern 1 und 2 in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$  dargestellt. Der größte Extremwert tritt für jede Ausprägung von  $s_2$  und  $s_3$  in der Übergangsfunktion  $\ddot{f}_6(x)$  der Kammer 1 auf (siehe auch Abbildung 23).

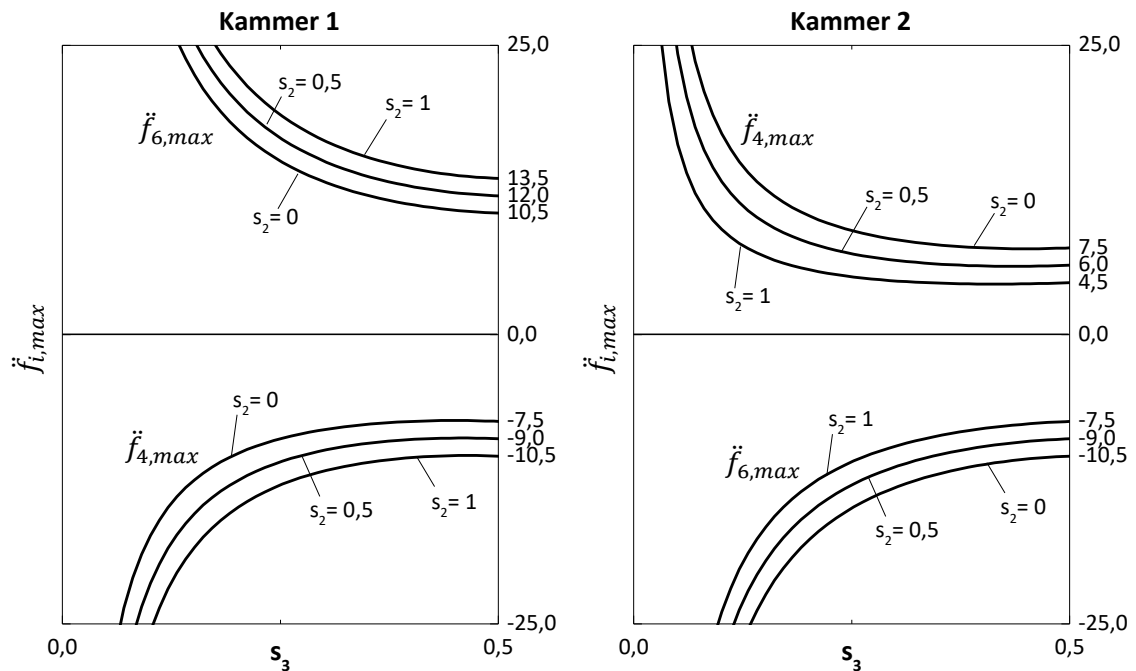


Abbildung 26: Dargestellt sind die von  $s_2$  und  $s_3$  abhängigen Extremwerte der TÜF  $\ddot{f}_i(x)$  der Kammern 1 und 2 in der Phase III. Der Parameter  $s_2$  wirkt in diesem Fall skalierend, während  $s_3$  maßgeblich den Verlauf bestimmt. Für  $s_3 = 0$  wäre  $\ddot{f}_{i,max}(x)$  unendlich groß. Die geringsten Werte  $\ddot{f}_{i,max}(x)$  treten dann auf, wenn sich die Übergangsfunktionen über die gesamte Phase III erstrecken ( $s_3 = 0,5$ ).

Mit zunehmendem  $s_3$  werden die Extremwerte der TUF  $\ddot{f}_i(x)$  beider Kammern kleiner. Im Gegensatz dazu hat der Phasenanteil  $s_2$  bei den Kammern 1 und 2 einen gegenläufigen Effekt. Mit zunehmendem  $s_2$  werden die Extremwerte für Kammer 2 zwar kleiner, jedoch im gleichen Maße für Kammer 1 größer. Der Kompromiss besteht darin,  $s_2$  so zu wählen, dass für Kammer 1 die Beträge der Extremwerte der TUF  $\ddot{f}_2(x)$  in Phase II und der TUF  $\ddot{f}_6(x)$  in Phase III gleich groß ist:

$$|\ddot{f}_{2,max}(s_2)| = |\ddot{f}_{6,max}(s_2, s_3)| \quad (12)$$

In diesem Fall lässt sich  $s_2$  als Funktion von  $s_3$  formulieren (siehe A10):

$$s_2 = \frac{s_3}{2} - 2 + \sqrt{4 - 1,75s_3^2} \quad (13)$$

Da in Phase III die Extrema für  $s_3 = 0,5$  am kleinsten sind, liegt in diesem Fall das Optimum für  $s_2$  gemäß (13) bei rund 0,14 und die für die Extrema der Kammer 1 gilt:

$$|\ddot{f}_{2,max}| = |\ddot{f}_{6,max}| \approx 10,92$$

## 4.2 Der Schlauch als Pumpkammer

### 4.2.1 Okklusionsmodell

Die Kammer einer linearen Schlauchpumpe besteht aus einem Schlauchabschnitt, welcher durch einen festen Körper, im Folgenden als Stößel bezeichnet, zusammengedrückt wird. Durch das Zusammendrücken des Schlauches wird das darin befindliche Volumen verdrängt. Für das Modell wird angenommen, dass der Schlauch auf einer ebenen Platte aufliegt und durch einen Stößel mit rechteckigem Querschnitt zusammengedrückt wird, wie in Abbildung 27 dargestellt.

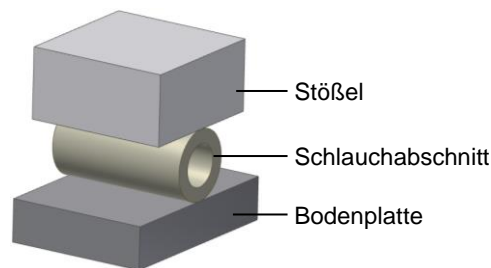
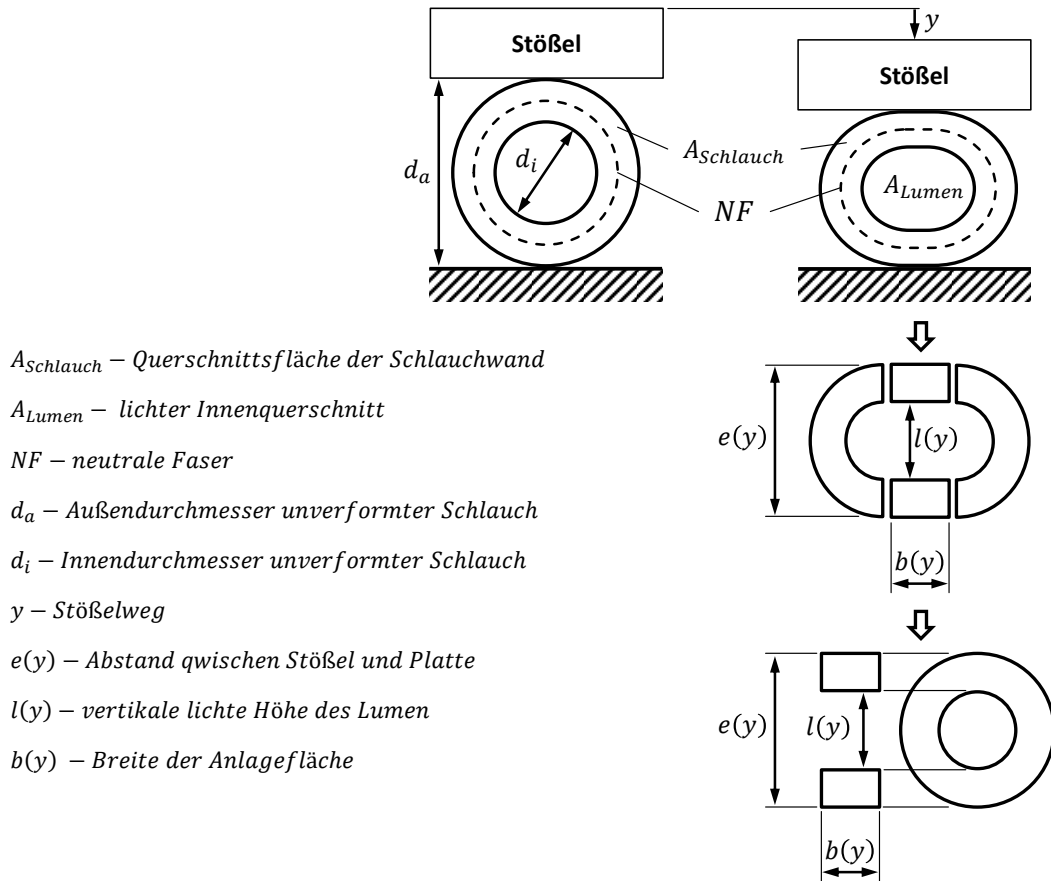


Abbildung 27: Prinzip der Pumpkammer für das Modell

Die dadurch gebildete Kammer erstreckt sich ausschließlich über die Länge des Stößels, wobei die Stößelbreite deutlich größer ist als der Schlauchdurchmesser und damit keinen Einfluss auf die Charakteristik der Volumenverdrängung hat. Etwaige Verformungseffekte des Schlauches, welche über die Stößellänge hinausgehen, werden in diesem Modell nicht berücksichtigt. Auf derartige Effekte wird später noch in den Kapiteln 5.1 und 6.1 eingegangen.

Des Weiteren wird für das Modell ein inkompressibles Schlauchmaterial angenommen, so dass die Querschnittsfläche der Schlauchwand während der Verformung konstant bleibt. Außerdem enthält die Schlauchwand eine neutrale Faser (kurz NF), deren Länge sich im betrachteten Verformungsfall nicht ändert. Aufgrund der konstant bleibenden Querschnittsfläche und der konstanten Länge der NF wird auch die Schlauchwanddicke als konstant angenommen (siehe A11).

Bezüglich der Verformung wird davon ausgegangen, dass sich der Schlauch optimal an Stößel und Bodenplatte anlegt, während die Seiten des Schlauches ihre runde Form aufrechterhalten, wie in Abbildung 28 dargestellt.



$A_{Schlauch}$  – Querschnittsfläche der Schlauchwand

$A_{Lumen}$  – lichter Innenquerschnitt

$NF$  – neutrale Faser

$d_a$  – Außendurchmesser unverformter Schlauch

$d_i$  – Innendurchmesser unverformter Schlauch

$y$  – Stößelweg

$e(y)$  – Abstand zwischen Stößel und Platte

$l(y)$  – vertikale lichte Höhe des Lumens

$b(y)$  – Breite der Anlagefläche

Abbildung 28: Dargestellt ist die idealisierte Verformung des Schlauchquerschnitts bei der Okklusion. Zur Berechnung des Lumens (lichter Innenquerschnitt) erfolgt die Beschreibung des verformten Schlauchquerschnitts anhand der geometrischen Primitive Scheibe und Rechteck.

Anhand der in Abbildung 28 dargestellten Beschreibung des verformten Schlauches durch geometrische Primitive lässt sich das Kammervolumen in Abhängigkeit von Stößelweg  $y$  und Stößellänge  $L_{Stößel}$  wie folgt berechnen:

$$V_{Kammer} = \frac{\pi}{4} (d_i^2 - y^2) \cdot L_{Stößel} \quad (14)$$

(Herleitung siehe A11)

Die normierte Funktion des Kammervolumens  $V(\varepsilon)$ , mit  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  lautet:

$$V(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 \quad (15)$$

für

$$V_{Kammer} = V(\varepsilon) \cdot \frac{\pi}{4} L_{Stößel} \cdot d_i^2 \quad (16)$$

und

$$y = d_i \cdot \varepsilon \quad (17)$$

In Abbildung 29 ist der Verlauf des Kammervolumens  $V(\varepsilon)$  in Abhängigkeit vom Stößelweg  $\varepsilon$  dargestellt. Dieser Verlauf bildet die Grundlage für die Berechnung des Stößelwegs in Abhängigkeit der im Phasenplan  $f(x)$  geforderten Kammervolumina.

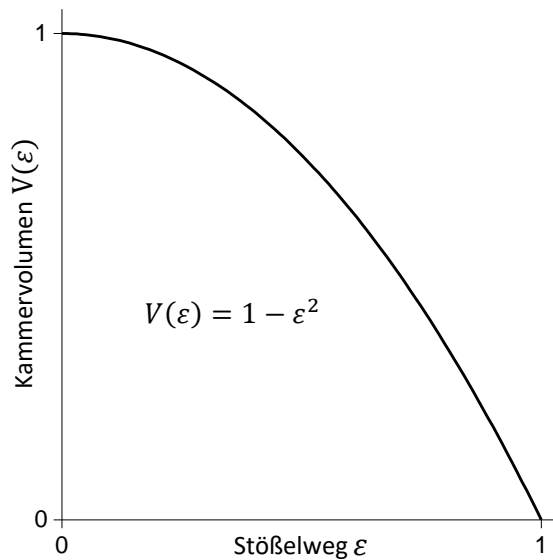


Abbildung 29: Normierte Darstellung des Kammervolumens in Abhängigkeit von der Stößelposition. Bei  $\varepsilon = 0$  ist die Kammer vollständig geöffnet, bei  $\varepsilon = 1$  ist die Kammer vollständig geschlossen.

Für die Herleitung wurde zunächst das Zusammendrücken des Schlauches, ausgehend vom unverformten Zustand  $y_0 = 0$  betrachtet (vgl. Abbildung 28). Um den Zusammenhang zwischen der Stößelposition und dem Kammervolumen für die Beschreibung der Pumpe zu nutzen, ist es allerdings günstiger, anstelle des unverformten Zustandes den Verschlusspunkt des Schlauches (Kammer geschlossen) als Referenzposition Null zu verwenden. Zum einen lässt sich der Verschlusspunkt in der Praxis einfacher und zuverlässiger bestimmen, und zum anderen ist die Interpretation des Phasenplanes intuitiver, da in diesem Fall der Bezug zwischen Kammervolumen und Stößelbewegung leichter herstellbar ist.

Zum Vertauschen des Bezugspunktes wird in ( 15 )  $\varepsilon$  durch  $1 - h$  substituiert ( $-h$  = Spiegelung an der Y-Achse;  $+1$  = Verschiebung entlang der Y-Achse um  $+1$ ). Die resultierende Funktion

$$V(h) = 2h - h^2 \quad (18)$$

beschreibt das in der Kammer befindliche Volumen in Abhängigkeit vom inversen Stößelweg, welcher im Folgenden als Stößelhub bezeichnet wird. Der Verlauf von ( 18 ) ist in Abbildung 30 dargestellt.

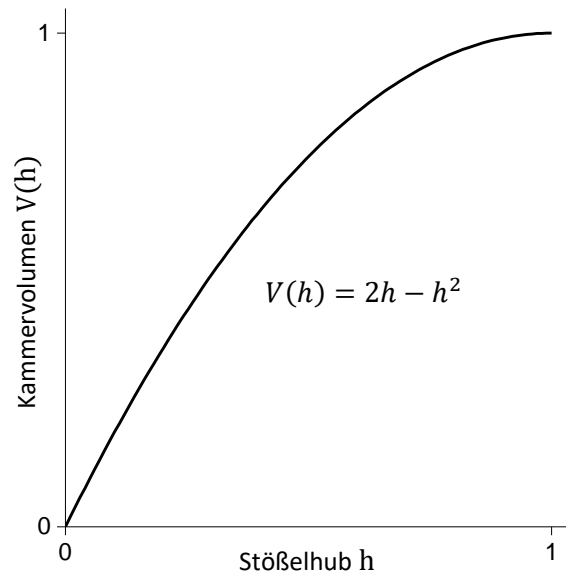


Abbildung 30: Normierte Darstellung des Kammervolumens in Abhängigkeit von der inversen Stößelposition. Bei  $h = 0$  ist die Kammer vollständig geschlossen, bei  $h = 1$  ist die Kammer vollständig geöffnet.

Da die Steuerung der Stößel anhand der vom Phasenplan  $f(x)$  vorgegebenen Volumenänderungen erfolgt, wird die Umkehrfunktion von ( 18 ) benötigt, welche den Stößelhub in Abhängigkeit des Kammervolumens beschreibt.

Eine quadratische Funktion besitzt zwei separate Umkehrfunktionen für die Funktionsabschnitte links und rechts des Scheitelpunktes, welcher sich für ( 18 ) bei  $h = 1$  befindet. Es wird die Umkehrfunktion für den Funktionsabschnitt links des Scheitelpunktes benötigt:

$$h(V) = 1 - \sqrt{1 - V} \quad (19)$$

In Abbildung 31 ist die Funktion  $V(h)$  sowie deren Umkehrfunktion  $h(V)$  dargestellt.

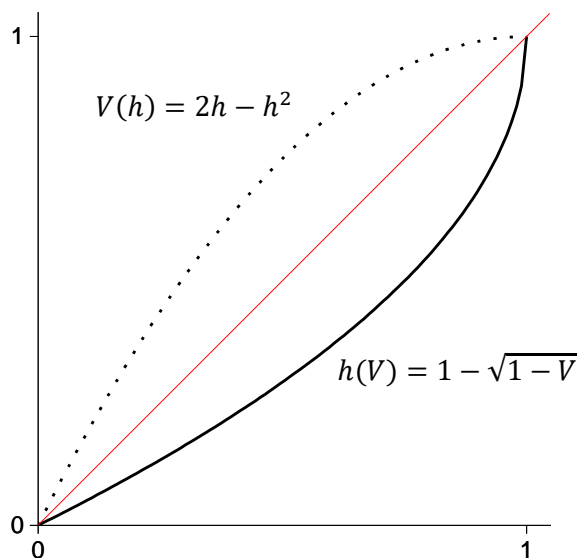


Abbildung 31: Verlauf der Funktion  $V(h) = 2h - h^2$  und deren Umkehrfunktion  $h(V) = 1 - \sqrt{1 - V}$  für  $0 \leq h \leq 1$  beziehungsweise  $0 \leq V \leq 1$ . Der Verlauf der Umkehrfunktion  $h(V)$  entspricht der Spiegelung des Funktionsverlaufs  $V(h)$  an der rot dargestellten 45°-Achse des Koordinatensystems.

### 4.2.2 Kammersteuerung

Für die Berechnung der für den pulsationsfreien Betrieb der Pumpe erforderlichen Stößelhöhe werden die in 4.1.3 beschriebenen TUF  $f_i(x)$  in ( 19 ) als normiertes Volumen  $V$  eingesetzt, so dass gilt:

$$h_i(x) = h_i(V(x)) = 1 - \sqrt{1 - f_i(x)} \quad ( 20 )$$

Formel ( 20 ) gilt zunächst ausschließlich für den Idealfall, dass die in der Pumpe physikalisch vorliegende Kammergrößenverteilung identisch der im Phasenplan  $f(x)$  von  $s_2$  und  $s_3$  abhängigen benötigten Kammergrößenverteilung ist.

Die in einer Pumpe physikalisch vorliegende Kammergrößenverteilung muss jedoch nicht exakt jener Kammergrößenverteilung entsprechen, welche gemäß Phasenplan (idealerweise) erforderlich wäre. Aus diesem Grund werden in den folgenden Abschnitten die Grundlagen für die Berechnung des Stößelhubs, in Abhängigkeit der in der Pumpe physikalisch vorliegenden Kammergrößenverteilung, entwickelt.

#### Einstellung der Kammergröße

Der Schlauchdurchmesser ist bei der betrachteten Pumpe für alle Kammern gleich groß, so dass die Größe einer Kammer nur über die Stößellänge eingestellt werden kann.

Die Funktion ( 18 ) gilt für die normierte Kammergröße von 1. Bei einer davon abweichenden Kammergröße ist die Funktion mit einem entsprechenden Faktor zu skalieren, welcher die Länge des Stößels einer Kammer  $K$  (1...5) bezogen auf die normierte Kammergröße 1 beschreibt:

$$V = L_K (2h - h^2) \quad ( 21 )$$

Die Umkehrfunktion von ( 21 ) lautet

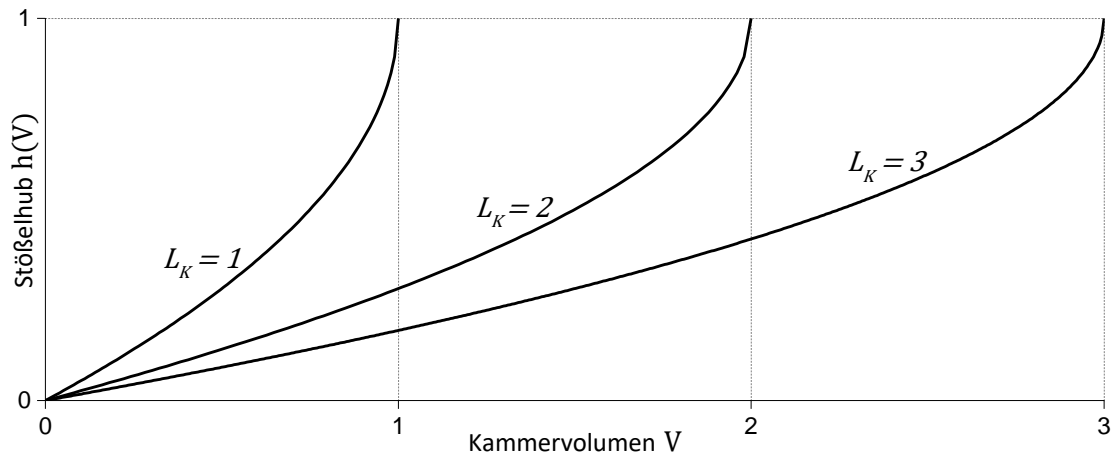
$$h = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{L_K} V} \quad ( 22 )$$

Somit ist die Funktion ( 20 ) um  $L_K$  zu erweitern und es folgt:

$$h_i(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{L_K} f_i(x)} \quad ( 23 )$$

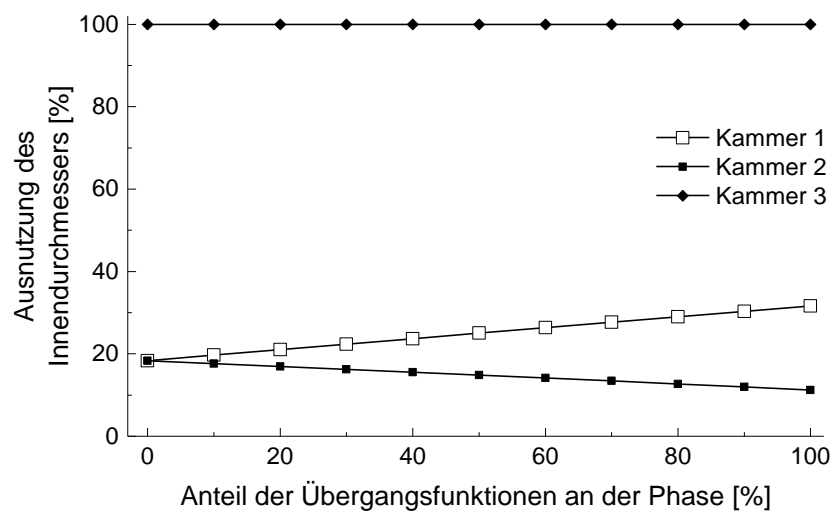
Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 32 die Kammercharakteristik in Abhängigkeit von der Stößellänge  $L_K$  dargestellt.



Abbildung 32: Kammercharakteristik  $h(V)$  in Abhängigkeit von der Stößellänge  $L_K$ .

### Schlauchausnutzung

Entspricht die pumpenseitig verfügbare Kammergrößenverteilung nicht der gemäß Phasenplan erforderlichen Kammergrößenverteilung, kann nicht in jeder Kammer der gesamte verfügbare Innenquerschnitt des Schlauches ausgenutzt werden. Sind zum Beispiel alle Stößel gleich lang, dann wird der gesamte Innenquerschnitt nur von der größten Kammer (in diesem Fall Kammer 3) genutzt. Abbildung 33 zeigt für diesen Fall den Grad der Schlauchausnutzung in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$ .

Abbildung 33: Grad der Schlauchausnutzung in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$ , wenn alle Kammern mit gleichgroßen Stößeln ausgestattet sind.

Für die Anpassung der Stößelhöhe auf die verfügbare Kammergröße sind die im Phasenplan beschriebenen Volumen-Zeit-Verläufe auf die Kammer mit dem größten Verhältnis zwischen benötigtem Volumen (Phasenplan) und verfügbarem Volumen (Stößellänge) zu normieren. Zum Beispiel würde bei einer Kammergrößenverteilung im Phasenplan von

$$1 : 1 : 3 : 1 : 1$$

und einer Stößellängenverteilung in der Pumpe von

$$1 : 1 : 1 : 1 : 1$$

die Normierung auf Kammer 3 erfolgen, indem alle Kammergrößen mit dem Faktor  $\frac{1}{3}$  skaliert werden, so dass die neue Größenverteilung dann lautet:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$$

Abbildung 34 veranschaulicht die Veränderung der Volumen-Hub-Charakteristik der kleineren Kammern.

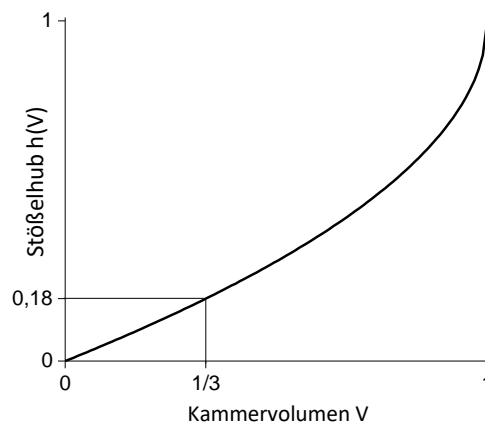


Abbildung 34: Bei Nutzung von  $1/3$  des Kammervolumens beträgt der Stößelhub 18 % des Maximalhubs, ausgehend vom Verschlusspunkt  $h = 0$ .

Allgemein lässt sich dies durch Erweitern von ( 20 ) mit dem einheitenfreien Parameter  $\xi$  beschreiben.

$$h_i(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi} \cdot f_i(x)} \quad ( 24 )$$

Dabei repräsentiert  $\xi$  den Faktor für die Normierung auf die Kammer mit dem größten Verhältnis zwischen benötigtem und verfügbarem Volumen. Im oben gegebenen Beispiel wäre  $\xi = 3$ .

### Kombination von Stößellänge und Schlauchausnutzung

Bisher wurden die beiden Varianten Anpassung der Kammergrößenverteilung und Schlauchausnutzung separat betrachtet. Die Einstellung der benötigten Kammergrößenverteilung über die Stößellängen ist jeweils nur für einen festen Parametersatz  $s_2, s_3$  möglich. Jede Änderung von  $s_2$  oder  $s_3$  erfordert die Anpassung der Stößellängen, weshalb dieser Ansatz nur dann sinnvoll ist, wenn  $s_2$  und  $s_3$  bekannt sind und nicht verändert werden. Die „Einstellung“ der Kammergrößen allein über die Schlauchausnutzung ist dagegen hochgradig ineffizient, da von den kleinen Kammern in diesem Fall nur noch ein geringer Teil des Schlauchinnenquerschnitts

genutzt wird. In der Praxis ist es daher sinnvoller, eine Kombination aus beidem zu verwenden. Dazu werden ( 23 ) und ( 24 ) wie folgt zusammengefasst:

$$h_i(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{L_K \cdot \xi} \cdot f_i(x)} \quad (25)$$

#### 4.2.3 Beispiel zur Berechnung der erforderlichen Stößelbewegungen

Im Folgenden wird die Berechnung der Stößelbewegung für das Beispiel einer Pumpe gezeigt, bei welcher die physikalisch vorliegende Kammergrößenverteilung 1 : 1 : 3 : 1 : 1 beträgt. Aus den gemäß Kapitel 4.1.5 als optimal berechneten Phasenanteilen  $s_2 = 0,14$  und  $s_3 = 0,5$  folgt eine Kammergrößenverteilung von 1,2 : 1,1 : 3 : 1,1 : 1,2.

##### Vorspannung

Bisher wurde davon ausgegangen, dass mindestens eine Kammer den Schlauchquerschnitt vollständig ausnutzt. Das bedeutet allerdings, dass für diese Kammer bei maximalem Stößelhub ein undefinierter Zustand auftritt, bei welchem der Stößel den Schlauch gerade noch berührt, jedoch nicht verformt. Für die praktische Auslegung der Pumpe ist es daher sinnvoll, den Schlauch auch bei maximalem Stößelhub unter Vorspannung zu halten. Aus diesem Grund wird der Stößelhub auf 90 % des maximal möglichen Stößelhubs begrenzt. Die restlichen 10 % werden dazu genutzt, den Schlauch auch bei vollständig geöffneter Kammer unter Vorspannung zu halten (siehe Abbildung 35).

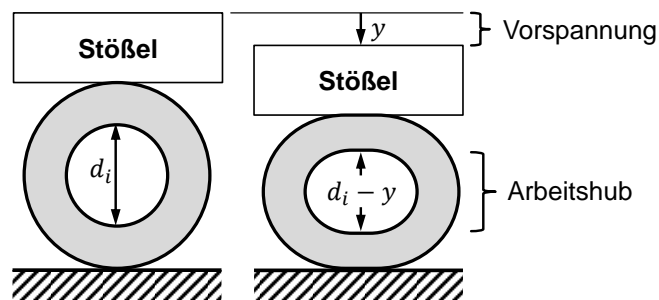


Abbildung 35: Darstellung der Vorspannung des Schlauches in vertikaler Richtung.

Für die in ( 18 ) beschriebene Volumen-Stößelweg-Charakteristik  $V(h) = 2h - h^2$  verringert sich durch eine Schlauchausnutzung von 90 % das nutzbare Kammervolumen um 1 %, wodurch sich die Verteilung der pumpenseitig verfügbaren Kammervolumina wie folgt verändern:

$$0,99 : 0,99 : 2,97 : 0,99 : 0,99$$

##### Umkehrpunkt Kammer 1

Für die Funktion der Pumpe ist es nicht erforderlich, dass die Kammern 1 und 5 dicht schließen. Die Dichtfunktion ist auf die Kammern 2 bis 4 beschränkt. Für die Kammern 1 und 5 werden

daher die Stößelbewegungen so ausgelegt, dass sich der untere Umkehrpunkt des Stößels oberhalb des Verschlusspunktes befindet. Da kein Kammerverschluss stattfindet, können die Kammern zu jedem Zeitpunkt vom Fluid durchströmt werden. Als feste Referenz für die Auslegung der Stößelbewegung dient der maximal zulässige obere Umkehrpunkt bei einem Stößelhub von 90 % des Schlauchinnendurchmessers.

Gemäß des Phasenplans  $f(x)$  (vgl. Abbildung 20) ist die Kammer 1 am weitesten geöffnet bei:

$$f_3(x) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (26)$$

(siehe (244) in A9)

Wenn der Arbeitshub auf 90 % des Schlauchinnendurchmessers begrenzt ist, folgt aus (25) zur Berechnung der Stößelposition in Abhängigkeit des momentanen Kammervolumens:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left(\frac{s_2}{2} + 1 + C_1\right)\right)} = 0,9 \quad (27)$$

Damit lässt sich  $C_1$  in Abhängigkeit der gegebenen Randbedingungen berechnen (siehe A12):

$$C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1 \quad (28)$$

Für die Kammer 5 lässt sich  $C_1$  in gleicher Weise berechnen (siehe A12). Infolge der in Kapitel 4.1.2 eingeführten Symmetriebedingung ist  $C_1$  bei gleichen Stößellängen  $L_1$  und  $L_5$  für Kammern 1 und Kammer 5 identisch.

Mit den in Kapitel 4.1.5 als optimal berechneten Phasenanteilen  $s_2 = 0,14$  und  $s_3 = 0,5$  beträgt die Kammergrößenverteilung im Phasenplan 1,2 : 1,1 : 3 : 1,1 : 1,2. Im Phasenplan  $f(x)$  wird zunächst davon ausgegangen, dass auch die Kammern 1 und 5 an einem Zeitpunkt im Arbeitszyklus vollständig geschlossen sind. Damit die Stößelbewegungen gemäß (25) so berechnet werden, dass die Kammern 1 und 5 im tiefsten Punkt der Stößelbewegung nicht dicht schließen, werden diese Kammern um 0,1 größer angesetzt. Die „geforderte“ Kammergrößenverteilung beträgt damit 1,3 : 1,1 : 3 : 1,1 : 1,3.

Aus den zuvor festgelegten Randbedingungen ergibt sich die Konfiguration:

benötigte Kammergrößenverteilung: 1,30 : 1,10 : 3,00 : 1,10 : 1,30

verfügbare Kammergrößenverteilung: 0,99 : 0,99 : 2,97 : 0,99 : 0,99

Verhältnis: 1,31 : 1,11 : 1,01 : 1,11 : 1,31

Das größte Verhältnis zwischen benötigter und verfügbarer Größe liegt für die Kammern 1 und 5 vor, dementsprechend gilt für den Parameter  $\xi$ :

$$\xi = 1,3$$

Die Parameter  $L_K$  entsprechen den „verfügbaren“ Kammergrößen; mit:

$$L_1 = L_2 = L_4 = L_5 = 0,99$$

und

$$L_3 = 2,97$$

Bei gegebenem  $\xi$  und  $L_1$  lässt sich  $C_1$  über ( 28 ) berechnen ( $C_1 \approx 0,2$ ).

### Berechnete Stößelbewegungen

Die mit ( 24 ) aus den TUF  $f_i(x)$  berechneten Stößelbewegungen (siehe A9) sind in Abbildung 36 dargestellt. Es werden ausschließlich die Stößel der Kammern 1 und 5 bis auf 90 % des Maximalhubes angehoben. Bei den restlichen Kammern beträgt der Stößelhub etwas mehr als 50 %.

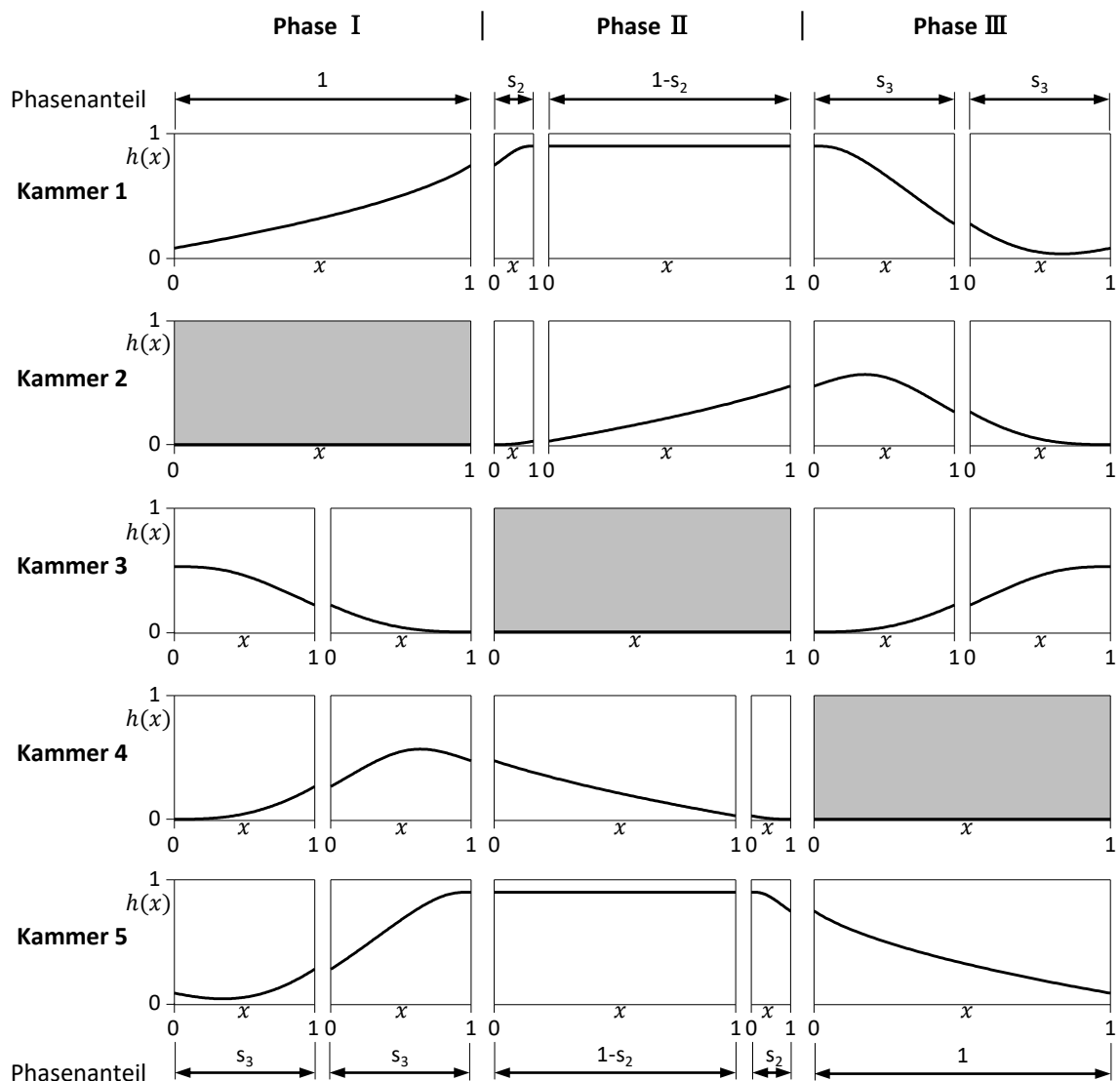


Abbildung 36: Darstellung der anhand der TUF  $f_i(x)$  berechneten Stößelhübe  $h(x)$ . Die Berechnung erfolgte für eine Stößellängenverteilung von 1 : 1 : 3 : 1 : 1 mit 10 % Vorspannung des Schlauches sowie  $s_2 = 0,14$  und  $s_3 = 0,5$ . Die Phasen in denen eine Kammer vollständig geschlossen ist, sind grau gekennzeichnet.

## 5 Experimentalaufbau zur Validierung des Pumpenmodells

### 5.1 Pumpschlauchcharakteristik

Für die Herleitung der theoretischen Verdrängungscharakteristik wurden zunächst mehrere Vereinfachungen getroffen. Im Gegensatz zum Modell treten beim realen Zusammendrücken des Schlauches die Begleiteffekte Querkontraktion und Flankenbildung (Abbildung 37) auf, so dass das aus einem Schlauch verdrängte Volumen nicht exakt dem theoretisch vorhergesagtem entspricht.

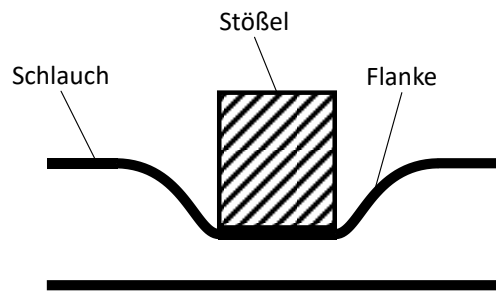


Abbildung 37: Infolge der bei Verformung auftretenden mechanischen Spannungen im Pumpschlauch bilden sich vor und nach dem Stößel Flanken, welche ebenfalls Fluid verdrängen, so dass die tatsächliche Kammer größer ist als der Bereich unter dem Stößel.

Die Form der Flanken ist, bei ansonsten gleichen Parametern, näherungsweise unabhängig von der Stößellänge, somit lässt sich aus den Messungen mit zwei unterschiedlichen Stößellängen der Anteil der Flanken am verdrängten Volumen berechnen.

Das Kammervolumen  $V_{Kammer}$  setzt sich aus dem unter dem Stößel befindlichen Volumen  $V_{St}$  und dem zusätzlich durch die Flanken verursachten Volumen  $V_{Fl}$  zusammen:

$$V_{Kammer} = V_{St} + V_{Fl} \quad (29)$$

Das Volumen  $V_{St}$  wird durch die vom Stößelweg  $y$  abhängige lichte Schlauchinnenquerschnittsfläche  $A(y)$  und die Stößellänge  $L_{St}$  bestimmt:

$$V_{St}(y) = A(y) \cdot L_{St} \quad (30)$$

Für zwei unterschiedliche Stößellängen gilt dementsprechend:

$$\begin{aligned} V_{Kammer\ 1}(y) &= A(y) \cdot L_{St\ 1} + V_{Fl}(y) \\ V_{Kammer\ 2}(y) &= A(y) \cdot L_{St\ 2} + V_{Fl}(y) \end{aligned} \quad (31)$$

Da die Schlauchinnenquerschnittsfläche  $A(y)$  und das Volumen  $V_{Fl}(y)$  für beide Kammern gleich ist, lässt sich  $V_{Fl}(y)$  aus (31) wie folgt berechnen:

$$V_{Fl}(y) = \frac{V_{K\ 2} \cdot L_{St\ 1} - V_{K\ 1} \cdot L_{St\ 2}}{L_{St\ 1} - L_{St\ 2}} \quad (32)$$

Um das reale Verhalten der Schläuche mit dem Modell zu vergleichen, erfolgte die experimentelle Bestimmung der Verdrängungscharakteristik exemplarisch für drei verschiedene Rollenpumpenschläuche mit identischem Innendurchmesser von 2,79 mm. Zwei der Schläuche besaßen die gleiche Wandstärke von 0,84 mm, unterschieden sich jedoch hinsichtlich der Zusammensetzung des Schlauchmaterials Polyvinylchlorid. Der dritte Schlauch besaß mit 0,92 mm eine größere Wandstärke und bestand aus Silikon. Die Details zu den Schläuchen sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

Tabelle 2: Übersicht der getesteten 2-Stopper-Rollenpumpenschläuche des Herstellers Saint-Gobain Performance Plastics Corporation

Material	Innen-& in mm	Wandstärke in mm	Härte Shore A	Lieferantenreferenz <a href="http://www.idex-hs.com">www.idex-hs.com</a>
PVC - Tygon® 2001	2,79	0,84	69	07MHSL-18i / SC0824
PVC - Tygon S3™ E-LFL (long flex life)	2,79	0,84	56	070602-18i-ND / SCE0430
Silikon	2,79	0,92	50	070497-20i / SC0634

Die Charakterisierung der Schläuche erfolgte mit dem in Abbildung 38 dargestellten Messaufbau, durch schrittweises Zusammendrücken fluidgefüllter Schlauchstücke und Messung der dabei verdrängten Fluidmasse. Dazu wurden Schlauchproben der Länge 120 mm mit einer an den Schlauchaußendurchmesser angepassten Halterungen auf einer Stahlplatte fixiert und durch Stößel (Aluminium) der Längen 9 und 15 mm zusammengedrückt.

Die Steuerung der Stößelposition erfolgte mit einem Linearantrieb vom Typ NEMESYS (NEMESYS Version 1, Cetoni GmbH, Deutschland). Für die Steuerung von Fahrweg, Schrittweite und Schrittdauer wurde eine eigens entwickelte LabView-Software verwendet. Die Messung der verdrängten Fluidmasse erfolgte mit einer Laborfeinwaage vom Typ METTLER AM50 (Mettler-Toledo International Inc.) mit einer Auflösung von 0,1 mg. Zum Aufzeichnen der Messwerte wurde die Software BalanceLink V4.0 (Mettler-Toledo International Inc.) genutzt.

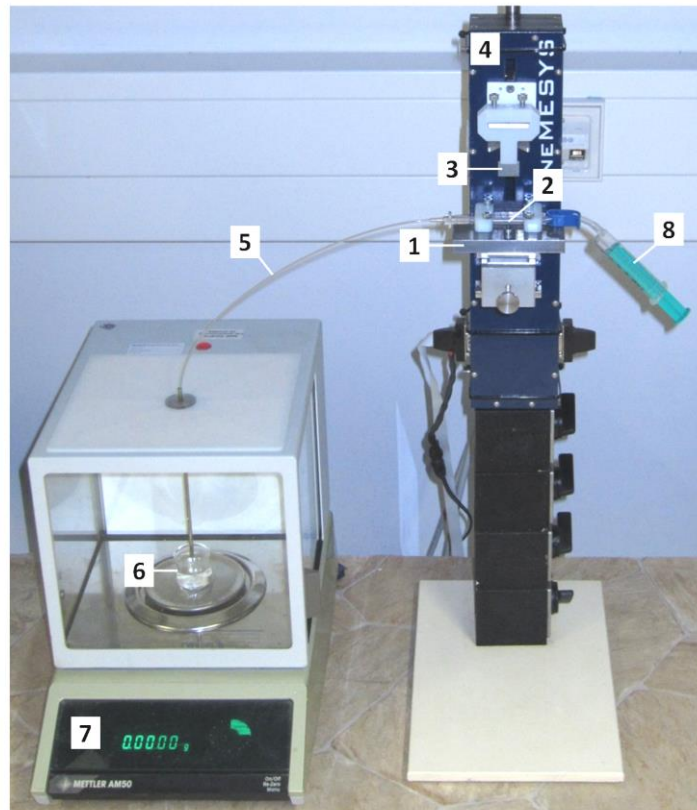


Abbildung 38: Messaufbau für die Verdrängungsmessung. Das auf einer Stahlplatte (1) fixierte Schlauchsegment (2) wird von einem Stößel (3) mit Hilfe eines Linearantriebs (4) schrittweise zusammengedrückt. Über ein Überleitsystem (5) wird das dabei verdrängte Fluid in ein Becherglas (6) geleitet und die entsprechende Masseänderung über eine Feinwaage (7) gemessen. Die Spritze (8) wurde zum Befüllen des Schlauches verwendet.

Als Überleitsystem zwischen Schlauchprobe und Feinwaage diente eine steife PEEK-Kapillare mit 0,75 mm Innendurchmesser, welche waagenseitig in einem mit Fluid gefülltem Becherglas endete. Um die tropfenfreie Einleitung des verdrängten Fluides sicherzustellen, reichte das Ende der Kapillare bis unter die Fluidoberfläche. Der dabei durch den Auftrieb verursachte Messfehler von 0,5 % (siehe A14) wird als vernachlässigbar angesehen.

Das Befüllen der Schlauchproben erfolgte über eine mit dem freien Schlauchende verbundene 6 ml-Einwegspritze. Anschließend wurde das mit der Spritze verbundene freie Schlauchende mittels Schlauchklemme fluidisch abgedichtet.

Für die Messung wurden die Schlauchproben in 50  $\mu\text{m}$  Schritten über einen Gesamtfahrweg (Stößelhub) von 3,5 mm zusammengedrückt. Nach jedem Schritt wurde die Position für 10 s gehalten, um den Messwert der Waage einschwingen zu lassen.

Start- und Endpunkt des Stößelhubs waren für alle getesteten Schläuche identisch. Die Festlegung erfolgte anhand der geometrischen Parameter Außendurchmesser (4,47 mm) und Wandstärke (0,84 mm) der Tygon-Schläuche. Der Startpunkt war so gewählt, dass zwischen



Stößel und unverformtem Schlauch ein  $300\text{ }\mu\text{m}$  Luftspalt vorlag. Für den Silikonschlauch mit  $0,92\text{ mm}$  Wandstärke betrug der Luftspalt dementsprechend  $140\text{ }\mu\text{m}$ .

Aus Vorversuchen war bekannt, dass für die vollständige Okklusion, ein stärkeres Zusammen-drücken des Schlauches erforderlich war als im Modell. Daher wurden die Schlauchproben bis auf das 1,5-fache ihrer Wandstärke zusammengedrückt. Da in Vorversuchen mit Wasser der Messwert der Waage in Folge der Verdunstung um etwa  $5\text{ mg/h}$  driftete, erfolgten die Messungen mit Öl (Ultragrade 19, Edwards, England). Bei Vergleichsmessungen mit diesem Öl trat keine Drift auf. Für jeden Schlauchtyp wurden je fünf Proben mit dem 9 und 15 mm langem Stößel getestet.

## 5.2 Pumpenprototyp

Für die Überprüfung des in Kapitel 4 aufgestellten Modells der pulsationsfreien Pumpe wurde ein technischer Demonstrator entwickelt, dessen Bauform auf die Verwendung handelsüblicher Zwei-Stopper-Rollenpumpenschläuche, mit einem Stopperabstand von  $150\text{ mm}$ , ausgelegt ist. Der Prototyp ist modular aufgebaut und kann mit zwei unterschiedlichen Antrieben ausgestattet werden. In Abbildung 39 ist das CAD-Modell des Prototyps in der Konfiguration mit Nockenwellenantrieb dargestellt. Die Pumpe besteht aus einem Aluminiumrahmen (1), fünf Stößelbaugruppen (3), der Schlauchaufnahme (2) und dem Antrieb, welcher entweder aus einer Nockenwelle (4) oder aus fünf unabhängigen steuerbaren Linearantrieben besteht.

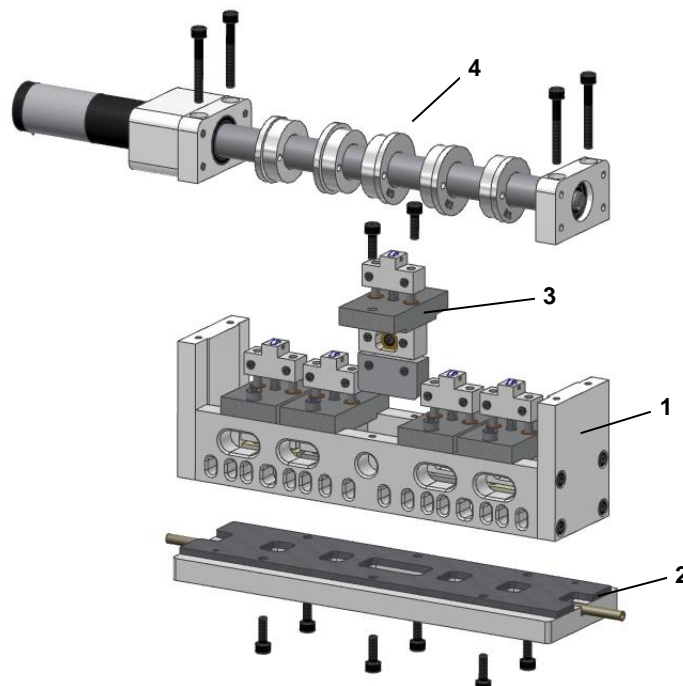


Abbildung 39: CAD Modell des Pumpenprototyps, bestehend aus einem Rahmen (1), der Schlauchaufnahme (2), fünf Stößelbaugruppen (3) und einem Antrieb, welcher entweder aus einer Nockenwelle (4) oder aus fünf separaten Linearantrieben (nicht dargestellt) besteht.

### 5.2.1 Schlauchaufnahme

Eine Detailansicht der Schlauchaufnahme ist in Abbildung 40 dargestellt. Die Schlauchaufnahme besteht aus einer Bodenplatte (2) zur Aufnahme des Schlauches (1) und einer Spannplatte (3). Die Bodenplatte besteht aus Aluminium. Die Spannplatte wurde aus einem 3 mm dicken Stahlblech gefertigt.

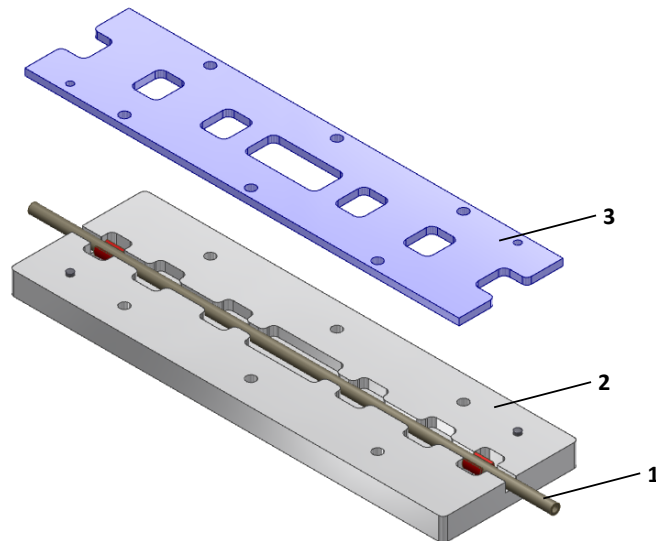


Abbildung 40: Die Schlauchaufnahme besteht aus Bodenplatte (2) und Spannplatte (3). Die Bodenplatte fasst den Schlauch und sorgt zusätzlich für eine longitudinale Vorspannung. Mit der Spannplatte erfolgt die transversale Vorspannung.

Um den Schlauch in einen definierten und reproduzierbaren Ausgangszustand zu bringen, wird dieser in der Schlauchaufnahme sowohl in longitudinaler als auch transversaler Richtung vorgespannt. Die longitudinale Vorspannung erfolgt durch eine Längsdehnung von 3 % beim Einlegen des Schlauches in die Bodenplatte, da der Abstand der Aussparungen für die beiden auf dem Schlauch befindlichen Stopper 5 mm größer ist als der Stopperabstand von 150 mm.

Um ein Verrutschen des Schlauches zu verhindern, enthält die Bodenplatte eine 4,5 mm breite Nut (Schlauchaußendurchmesser 4,47 mm), welche an jenen Stellen unterbrochen ist, an denen der Schlauch durch einen Stößel zusammen gedrückt wird. Die Nuttiefe ist mit 4,1 mm um 0,3 mm geringer als der Schlauchaußendurchmesser der Tygon-Schläuche, so dass der Schlauch durch die auf der Bodenplatte aufliegende Spannplatte in Deformationsrichtung um 0,3 mm vorgespannt wird.

### 5.2.2 Stößelbaugruppen

Die in Abbildung 41 dargestellte Stößelgruppe fasst mehrere mechanische Komponenten zusammen. Sie beinhaltet den eigentlichen Stößel (1), eine Feineinstellung (2) der Stößelposition, eine Aufhängung (3) für die Montage der Baugruppe in den Rahmen sowie einen

Lagerbock (5) mit Kugellager (MR 52 ZZ) zum Abgreifen der Kurvenscheiben. Zwischen der Aufhängung (3) und dem Lagerbock (5) sorgt eine Druckfeder (D-030B, Gutekunst + Co.KG) dafür, dass das im Lagerbock befindliche Kugellager mit einer Kontaktkraft von mindestens 1,7 N gegen die Kurvenscheibe oder den Linearantrieb gedrückt wird. Unabhängig von der Rückstellkraft des Schlauches ist somit der Kontakt zwischen Kurvenscheibe und Kugellager sichergestellt.

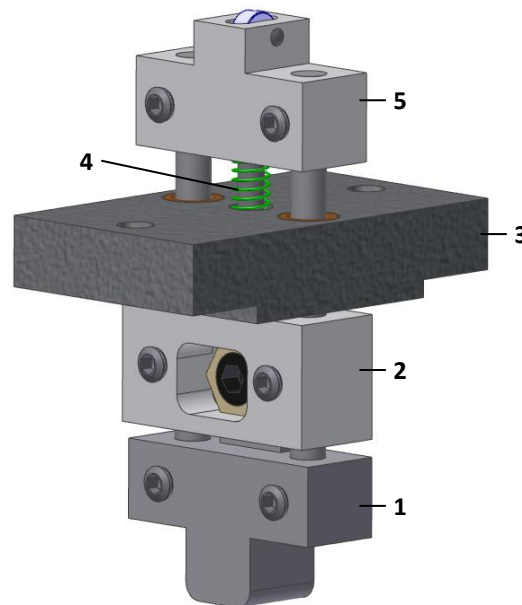


Abbildung 41: Stößelgruppe bestehend aus Stößel (1), Feineinstellung (2), Aufhängung (3) und Lagerbock (5). Eine Druckfeder (4) sorgt dafür, dass der Stößel unabhängig von der Rückstellkraft des Schlauches angehoben wird.

Solange die Pumpe mit Linearantrieben ausgestattet ist, erfolgt die Steuerung der Stößel unter Bezug auf die Positionen der Verschlusspunkte, welche softwareseitig eingestellt werden. Ist die Pumpe mit dem Nockenwellenantrieb ausgestattet, werden die Verschlusspunkte mechanisch eingestellt. Dies erfolgt mit der Feineinstellung (2), in welcher über Spann-Exzentrerschrauben (norem Normelemente KG) der Abstand zwischen Kugellager und Stößel in einem Bereich von 0,8 mm feinfühlig variiert werden kann. Diese Art der Feineinstellung wurde gewählt, um die Justierung der Verschlusspunkte bei vollständig montierter Pumpe und idealerweise auch im laufenden Betrieb vornehmen zu können.

Für die Stößellängen im Prototyp wurde eine Verteilung von 1 : 1 : 3 : 1 : 1 gewählt, da in den Versuchen zunächst keine Festlegung auf bestimmte Werte von  $s_2$  und  $s_3$  erfolgte. In Abbildung 42 ist der Stößel der Kammer 3 dargestellt. Die Stößel der Kammern 2, 3 und 4 sind mit einem 0,5 mm breiten und 0,3 mm hohen Dichtsteg (1) ausgestattet. Dadurch wird der Verschlusspunkt auf eine kleine Region des Schlauches begrenzt, was einerseits die erforderliche Verschlusskraft verringert und andererseits hilft, sensible Fluide wie Zellsuspensionen oder Blut

zu schonen. Die Stößelkanten (2) aller Stößel sind mit einem 2 mm Radius versehen, um einem möglichen Schlauchverschleiß in Folge zu geringer Biegeradien an den Kanten vorzubeugen.

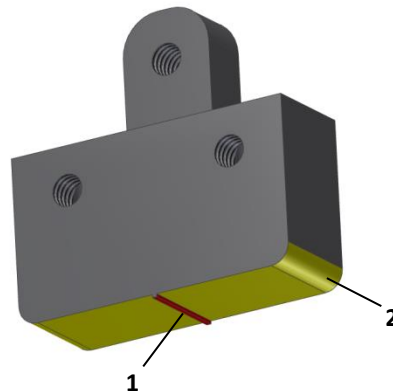


Abbildung 42: Stößel der Kammer 3 mit einer Länge von 30 mm. Die Kontaktflächen zum Schlauch sind gelb eingefärbt. Bei allen Stößeln sind die Kanten (2) abgerundet um den Schlauchverschleiß zu minimieren. Zur Verringerung der erforderlichen Verschlusskraft sind die Stößel der dicht schließenden Kammern mit einem Dichtsteg (1) ausgestattet.

### 5.2.3 Antrieb

Der Prototyp lässt sich mit zwei unterschiedlichen Arten von Antrieb ausstatten. Durch fünf Linearantriebe lassen sich alle Stößel separat steuern. Diese Antriebe wurden für die Optimierung der Stößelbewegungen verwendet, um unterschiedliche Ausprägungen der Übergangsfunktionen praktisch zu testen und zu variieren.

Die zweite Art von Antrieb besteht aus einer zentral angetriebenen Nockenwelle. Diese bietet nicht die Flexibilität der Linearantriebe, ist jedoch effizienter bei der praktischen Nutzung der Pumpe. Im Gegensatz zu den Linearantrieben, welche für langsame Stößelbewegungen konzipiert sind, kann mit der Nockenwelle ein wesentlich größerer (drehzahlabhängiger) Förderratenbereich abgedeckt werden. Mit dem Nockenwellenantrieb wurde überprüft, inwieweit das Prinzip der pulsationsfreien Schlauchpumpe in eine robuste und praktisch nutzbare Pumpe übertragbar ist.

#### Linearantriebe

##### **Aufbau**

Der Aufbau der verwendeten Linearantriebe ist in Abbildung 43 dargestellt. Die Funktion der Linearantriebe basiert auf der Umwandlung der Drehbewegung eines Motors (1) unter Verwendung einer Gewindespindel (3) in eine lineare Bewegung. Zwei Druckfedern (7) sorgen für die spielfreie Verspannung der Traverse mit Spindelmutter (4) gegen die Gewindespindel (3). Die Bewegungsübertragung von der Traverse (4) auf den Stößel erfolgt aus bautechnischen Gründen über ein Trapez (5).

Für den Antrieb werden geregelte Servomotoren (Artikel-Nr. 320796, maxon motor AG) verwendet, deren Positionsregelung auf der Erfassung der Wellenumdrehungen mittels integriertem magnetoresistivem Encoder basiert. Die kleinstmögliche Schrittweite der Linearantriebe beträgt rund  $0,03\text{ }\mu\text{m}$ . Sie resultiert aus der Übersetzung des Motorgetriebes (225/16), der Steigung der Gewindespindel (1 mm/Umdrehung) und der Auflösung des Encoders (4·512 Inkremente). In der für die Steuerung der Antriebe entwickelten LabView-Software erfolgte die Positionierung mit einer Auflösung von  $1\text{ }\mu\text{m}$ .

Für die verwendeten Motorsteuerungen (EPOS 24/1, maxon motor AG) stehen herstellerseitig umfangreiche LabView-Bibliotheken zur Verfügung, welche für die in dieser Arbeit entwickelten LabView-Programme genutzt wurden.

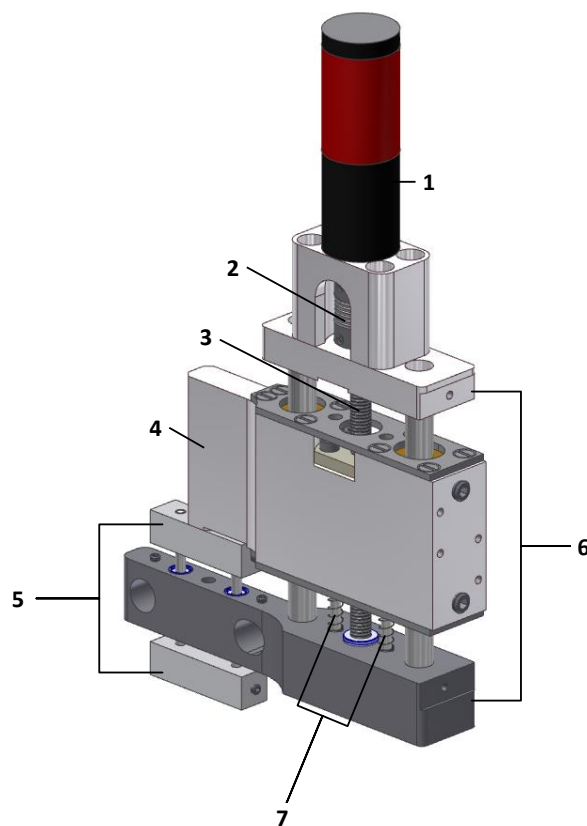


Abbildung 43: Aufbau der verwendeten Linearantriebe: Der Motor (1) ist durch eine Wellenkupplung (2) mit einer im Rahmen (6) spielfrei gelagerten Gewindespindel (3) verbunden. Die Drehbewegung wird über eine in der Traverse (4) enthaltene Spindelmutter in eine lineare Bewegung umgewandelt und über das Trapez (5) auf die Stößelgruppe (siehe Abbildung 41) übertragen. Die beiden Druckfedern (7) verspannen die Traverse (4) spielfrei gegen die Gewindespindel (3).

### **Positionierung**

Da die Positionserfassung der verwendeten Motoren durch einen inkrementell zählenden Sensor erfolgt, ist eine Referenzposition erforderlich. Diese wird bei jeder Inbetriebnahme der Antriebe durch eine Referenzfahrt neu ermittelt und bleibt für die Dauer des Betriebes erhalten. Als Referenzposition dient der obere mechanische Anschlag der Traverse gegen den Rahmen, da sich diese Position außerhalb des Bewegungsbereiches der Stößel befindet. Das Erreichen des harten mechanischen Anschlags wird von der Motorsteuerung durch Überschreiten eines Motorstroms von 350 mA registriert. Die Wiederholgenauigkeit der auf diese Weise ermittelten Referenzpositionen beträgt 1  $\mu\text{m}$ .

Für die Linearantriebe und die Stößel der Pumpe gelten unterschiedliche Bezugssysteme. Die Antriebsposition wird ausgehend vom Referenzpunkt in positiver Richtung gezählt. Die Stößelbewegung wird dagegen ausgehend vom Verschlusspunkt des Schlauches in positiver Richtung gezählt.

### **Umkehrspiel**

Bei der Konstruktion der Linearantriebe wurde Wert darauf gelegt, Spindelmutter und Gewindespindel durch Druckfedern spielfrei gegeneinander zu verspannen um ein Umkehrspiel der Traverse zu vermeiden. Jedoch weisen die Planetengetriebe der verwendeten Servomotoren ein mittleres Getriebespiel von  $1,2^\circ$  auf. Dieses Getriebespiel wird motorseitig nicht erfasst, da die inkrementelle Bewegungserfassung nicht auf der Abtriebswelle des Getriebes, sondern auf der Motorwelle erfolgt. Infolge dieses Getriebespiels ist bei einer Steigung der Gewindespindel von 1 mm ein mittleres Umkehrspiel der Traversen von 3  $\mu\text{m}$  zu erwarten ( $1\text{ mm} \cdot 1,2^\circ / 360^\circ$ ). Das mit einer Digitalmessuhr (MahrCator 1075 R, Mahr GmbH, Genauigkeit 5  $\mu\text{m}$  auf 12,5 mm) tatsächlich gemessene ( $n = 10$ ) Umkehrspiel der Traverse beträgt bei allen fünf Linearantrieben 5  $\mu\text{m}$ . Um zu vermeiden, dass die Traverse bei jedem Wechsel der Bewegungsrichtung der berechneten Antriebsposition um diesen Wert „hinterhereilt“, erfolgte in der später noch beschriebenen Software „Steuerkurvenoptimierung“ eine Umkehrspielkompensation.

### **Nockenwellenantrieb**

Für den Nockenwellenantrieb sind fünf Kurvenscheiben (Nocken) auf einer Welle angeordnet. Jede dieser Kurvenscheiben steuert den Bewegungsablauf eines Stößels. Da die Nockenwelle mit konstanter Drehzahl betrieben wird, und eine Umdrehung den Arbeitszyklus der Pumpe abbildet, unterteilen sich die Kurvenscheiben entsprechend der drei isochronen Phasen des Phasenplans in drei Sektoren zu je  $120^\circ$ . Für die phasengleiche Ausrichtung auf der Welle befindet sich in jeder Kurvenscheibe ein Langloch  $0,5 \times \varnothing 3\text{ H7}$  an der Position  $0^\circ$ , welche dem

Startpunkt der Phase I entspricht. Zur Ausrichtung der Kurvenscheiben zueinander wird eine Passstange  $\varnothing 3$  g6 durch diese Langlöcher geführt.

Die Herstellung der Kurvenscheiben erfolgte durch einen externen Fertiger (Fraunhofer-Institut für Angewandte Optik und Feinmechanik *IOF*, Jena). Vom Hersteller wurde anhand der in Abbildung 44 dargestellten Vermessung einer dieser Kurvenscheiben eine Fertigungsgenauigkeit von  $\pm 5 \mu\text{m}$  nachgewiesen.

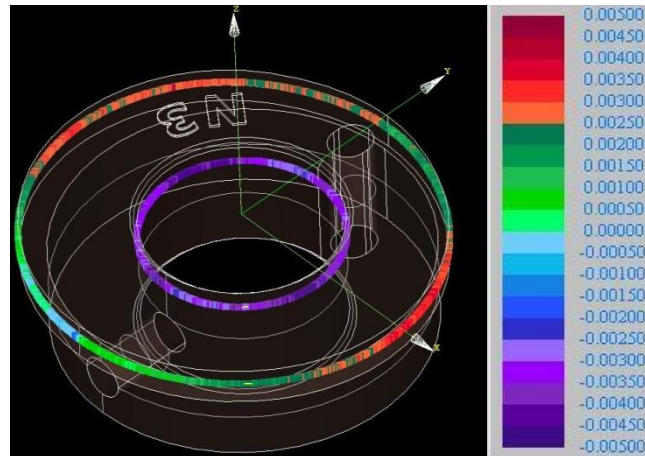


Abbildung 44: Vermessung einer der gefertigten Kurvenscheiben mit einem taktilen Koordinatenmessgerät (nicht näher spezifiziert) durch das Fraunhofer-Institut für Angewandte Optik und Feinmechanik *IOF*, Jena. Die Abweichung der Messpunkte von der im CAD-Modell hinterlegten Kontur ist farblich kodiert und in Millimetern angegeben. Der Bezug zwischen den Messpunkten und dem Modell wurde über die beste „Einpassung“ der Messpunkte im Innenkreisdruckmesser hergestellt.

Der Antrieb der Nockenwelle besteht aus einem Servomotor (Artikel-Nr. 335161, maxon motor AG) in Kombination mit der Motorsteuerung EPOS 24/1 (maxon motor AG).

### 5.3 Messaufbau

Zur Steuerkurvenoptimierung und Charakterisierung des Prototyps wurde der in Abbildung 45 schematisch dargestellte Messaufbau verwendet. Die für diesen Messaufbau verwendeten Komponenten sind in Tabelle 3 spezifiziert.

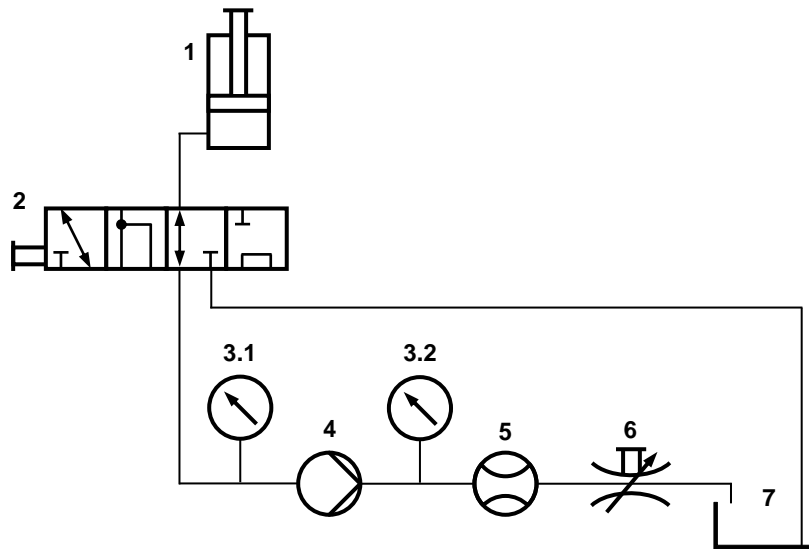


Abbildung 45: Schema des verwendeten Messaufbaus: Zur Einstellung von zwei möglichen Betriebsmodi wurde ein 3-Wege-Hahn mit T-Bohrung (2) verwendet. Für die Bestimmung der Verschlusspunkte der einzelnen Kammern im Prototyp (4) wurde der Pumpeneingang mit einem manuell betätigten Kolben (1) verbunden (gezeigte Stellung). Über einen Drucksensor (3.1) wurde dabei der pumpeneingangsseitige Fluiddruck gemessen. Die Optimierung und Charakterisierung erfolgte im Kreisbetrieb, in welchem der Pumpenprototyp (4) Fluid aus dem offenen Reservoir (7) förderte und in dieses zurückpumpte. Der Pumpenausgangsseitig anliegende Druck wurde mit dem Drucksensor (3.2) und der erzeugte Fluidstrom mit dem Massenflusssensor (5) gemessen. Mit dem Drosselventil (6) konnte der pumpenausgangsseitige fluidische Widerstand erhöht werden.

Der Messaufbau umfasste den Prototyp der Pumpe (4) einen manuell zu betätigenden Kolben (1) in Form einer Perfusor-Spritze, einen Dreiwegehahn (2), einen Drucksensor (3), einen Massenflusssensor (5), ein Drosselventil (6) sowie ein Reservoir (7). Der Drucksensor wurde in Abhängigkeit der Messaufgabe an der Position (3.1) oder (3.2) installiert. Das Drosselventil (6) diente der Einstellung unterschiedlicher Gegendrücke am Pumpenausgang. Die Verbindung des Pumpenausgangs mit den Sensoren (3.2) und (4) erfolgte durch, im Vergleich zu den in der Pumpe verwendeten Elastomerschläuchen, steife PTFE Schläuche. Dies zielte darauf, die pulsationsdämpfende Wirkung der Leitungsabschnitte zu minimieren. Für die übrigen fluidischen Verbindungen wurden nicht näher spezifizierte Elastomerschläuche verwendet.



Tabelle 3: Komponenten des fluidischen Messaufbaus

Komponente	Spezifikation	Hersteller
(1) Einwegspritze	Original-Perfusor®-Spritze 50 ml	B. Braun Melsungen AG, Deutschland
(2) Dreiwegehahn	Luer-Lock w/w/m	Fresenius Kabi Deutschland GmbH
(3) Drucksensor	Typ HPSA-B10DVAA-003-G 0 - 3 bar; Genauigkeit 0,1 %	ALTHEN GmbH Mess- und Sensortechnik, Deutschland
(5) Massenflusssensor	Typ M13-ABD-22-0-S 0 - 2.000 g/h Genauigkeit 0,35 %	BRONKHORST CORI-TECH B.V., Niederlande
(6) Drosselventil	P-447 - Micro Metering Valve	IDEX Corporation, USA
(7) Reservoir	250 ml Laborglasflasche	DURAN Group GmbH, Deutschland
PTFE-Schlauch	Rotilabo®, 2 mm Innendurch- messer	Carl Roth GmbH + Co. KG, Deutschland

In dem Prototyp wurde Wasser als zu pumpendes Fluid verwendet. Die Messung der Fluidmenge erfolgte mit einem Massenflusssensor des Typs mini CORI-Flow™ (Bezeichnung: M13-ABD-22-0-S, BRONKHORST CORI-TECH B.V.) mit einem Messbereich von 2.000 g/h und 0,35 % Genauigkeit. Bei der Darstellung der Ergebnisse wird auf die Umrechnung des Massenflusses in einen Volumenstrom verzichtet. Mit einer Dichte des Wassers von rund 1 g/cm<sup>3</sup> (bei 20°C) entspricht eine Fluidmasse von 1 g dem Volumen von 1 ml.

## 5.4 Steuerkurvengenerierung und -optimierung

Im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen Überprüfung des Okklusionsmodells, bei welcher drei verschiedene Schlauchtypen getestet wurden, beschränkte sich die Steuerkurvenberechnung und -optimierung auf einen Schlauchtyp. Zu diesem Zweck verwendet wurde ein Schlauch vom Typ Tygon S3 E-LFL, einem etablierten Rollenpumpenschlauch mit vielfältigem Einsatzspektrum. Die Generierung und Optimierung der Steuerkurven erforderte mehrere Arbeitsschritte. Der Prototyp war dafür mit den zuvor beschriebenen Linearantrieben ausgerüstet.

Zunächst wurden die Kammern 3, 4 und 5 hinsichtlich ihres Verdrängungsverhaltens charakterisiert. Anhand der ermittelten Fluidmasse-Stößelweg-Charakteristik (kurz: Masse-Weg-

Charakteristik) wurden unter Verwendung des Phasenplanes die für einen pulsationsfreien Massenfluss (bzw. Volumenstrom) erforderlichen Stößelbewegungen sowie die für die Linearantriebe benötigten „Steuerkurven“ berechnet. Im Gegensatz zu den Stößelbewegungen, welche die zeitliche Änderung der absoluten Stößelposition beschreiben, stellen die Steuerkurven die dafür erforderlichen relativen Positionsänderungen der Antriebe dar. Die Optimierung der Steuerkurven erfolgte in einem empirischen Prozess.

### 5.4.1 Kammercharakterisierung

Das Prinzip der Kammercharakterisierung ähnelt der in 5.1 beschriebenen Charakterisierung der Pumpschläuche. Für die Kammercharakterisierung wurde der betreffende Schlauchabschnitt im Prototyp mit konstanter Geschwindigkeit bis zu seinem Verschlusspunkt zusammengedrückt und die dabei verdrängte Fluidmasse gemessen. Dabei erfolgte keine „isolierte“ Betrachtung des Schlauches, wie in Kapitel 5.1, sondern es wurden auch die Eigenschaften des auf die Kammer wirkenden Stößels und des den Stößel betätigenden Linearantriebes mit abgebildet. Als Fluid wurde Wasser verwendet, da in dem fluidischen Messaufbau (siehe Abbildung 45) kein Verdunsten des Fluids möglich war. Die Charakterisierung der Kammern erfolgte teilautomatisiert mit dem LabView-Programm „Kammer-Charakterisierung“. Im Folgenden ist die Prozedur der Kammercharakterisierung ausführlich beschrieben.

#### Verschlusspunkte

Zu Beginn wurden die Verschlusspunkte der einzelnen Kammern ermittelt. Diese dienen als Referenzpunkte für alle darauf folgenden Prozessschritte. Die Verschlusspunktbestimmung erfolgte durch schrittweises Schließen der betreffenden Kammer, mit einer minimalen Schrittweite von  $1\text{ }\mu\text{m}$ , solange, bis bei einem anliegenden Eingangsdruck von 1 bar kein Massenfluss am Pumpenausgang mehr gemessen wurde. Der Eingangsdruck wurde über den Kolben (1) (Abbildung 45) erzeugt. Für die Kammern 1 und 5, welche nicht dicht schließen mussten und dementsprechend auch nicht mit einem Dichtsteg versehen waren, wurde der Verschlusspunkt so eingestellt, dass bei 1 bar ein Massenfluss von  $0,2\text{ g/min}$  auftrat.

#### Masse-Weg-Charakteristik

Die wegabhängige Masseverdrängung wurde ausschließlich für die Kammern 3, 4 und 5 gemessen. Vereinfachend wurde davon ausgegangen, dass in Folge der Baugleichheit das Verdrängungsverhalten der Kammern 1 und 5 sowie der Kammern 2 und 4 identisch war. Für die Messung wurde die pumpeneingangsseitig vor der zu messenden Kammer  $K$  gelegene Kammer  $K - 1$  geschlossen. Alle anderen Kammern blieben maximal geöffnet. Die Messung der

wegabhängigen Massenverdrängung einer Kammer erfolgte anschließend, indem der betreffende Linearantrieb mit konstanter Geschwindigkeit von 0,05 mm/s in die Verschlusspunktposition der Kammer gefahren wurde. Während der Messung wurde der Verlauf der aus der Kammer verdrängten Masse aus dem Integral (Bode-Regel) des Massenflusses berechnet und zusammen mit den korrespondierenden Antriebspositionen aufgezeichnet. Aus diesen Daten wurde anschließend die in Abbildung 46 (rechts) dargestellte Masse-Weg-Charakteristik berechnet. Der Bezugspunkt für den Weg war der Verschlusspunkt der Kammer, so dass diese Charakteristik den Massefüllstand in Abhängigkeit vom Stößelhub darstellt. Der maximal mögliche Stößelhub wurde durch die Position definiert, an welcher der Anstieg Masse-Weg-Charakteristik den Wert Null erreicht.

Zur Beschreibung der Masse-Weg-Charakteristik wurde ein Polynom 2. Grades verwendet. Das entsprechende Polynom wurde so berechnet, dass es sich mit dem ersten (Verschlusspunkt) und letzten (maximaler Stößelhub) Wert der Masse-Weg-Charakteristik vollständig deckt. Die Anpassung an die dazwischen liegenden Werte erfolgte nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Singulärwertzerlegung).

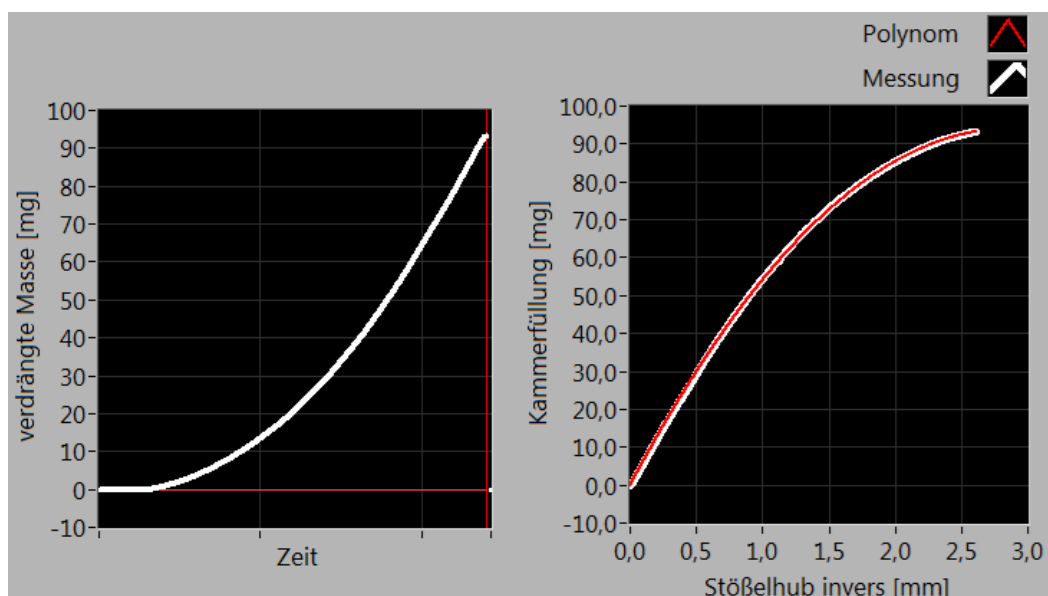


Abbildung 46: Zur Charakterisierung einer Kammer wurde diese über den entsprechenden Linearantrieb mit einer Geschwindigkeit von 0,05 mm/s geschlossen. Die im rechten Grafen gezeigte Masse-Weg-Charakteristik der Kammer wurde aus der im linken Grafen dargestellten Masse-Zeit-Charakteristik und den dazu korrespondierenden Antriebspositionen berechnet. Für die spätere Steuerkurvenberechnung wurde die Masse-Weg-Charakteristik durch ein Polynom 2. Grades (rot dargestellt) approximiert.

Für die anschließende Steuerkurvenberechnung wurden die Werte für das Umkehrspiel der Antriebe, die Positionen der Verschlusspunkte sowie der Maximalhub und die Polynomkoeffizienten der Massen-Hub-Charakteristik der Kammern 3 bis 5 verwendet.

### 5.4.2 Steuerkurvenberechnung

Die Steuerkurvenberechnung erfolgte mit dem LabView-Programm „Steuerkurvengenerator“, in welchem das entwickelte Pumpenmodell hinterlegt ist. Das Programm stellt den Phasenplan anhand von 91 äquidistanten Stützstellen dar. Pro Phase werden 30 Stützstellen verwendet. Am Ende von Phase III wird eine zusätzliche Stützstelle angezeigt, deren Wert identisch mit der ersten Stützstelle der Phase I ist, um die Interpretation der Darstellung intuitiver zu gestalten. Abbildung 47 zeigt einen Ausschnitt der Benutzeroberfläche des Programms mit der Darstellung des Phasenplanes. Die Parameter  $s_2$  und  $s_3$ , lassen sich in der Benutzeroberfläche einstellen.

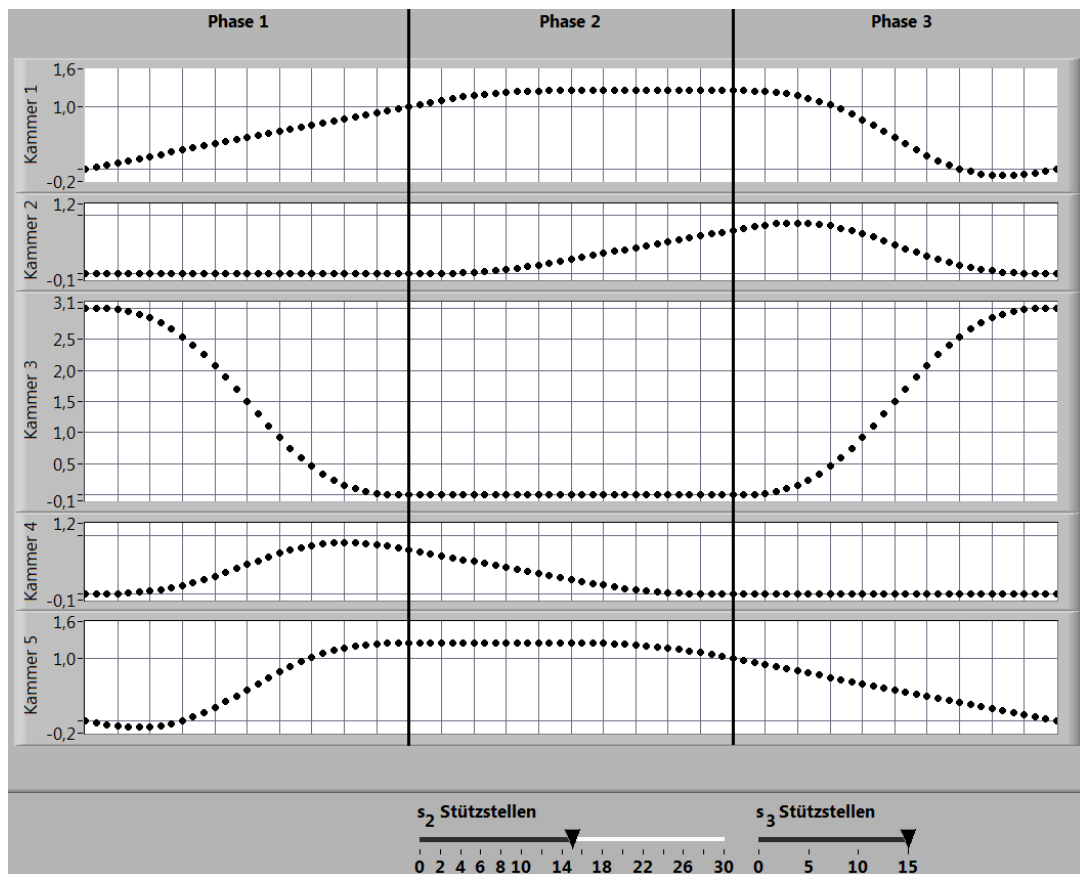


Abbildung 47: Ausschnitt aus dem Programm „Steuerkurvengenerator“. Die Diagramme zeigen den Phasenplan, welcher anhand der eingestellten Parameter  $s_2$  und  $s_3$  berechnet wird.

Die Berechnung der zum Erfüllen des Phasenplanes erforderlichen Stößelhubverläufe erfolgt unter Verwendung der zuvor ermittelten Kammercharakteristik. Dazu lassen sich zusätzlich zu den Parametern  $s_2$  und  $s_3$  der Grad der Schlauchausnutzung in Prozent sowie ein Offset der Kammern 1 und 5 zum Verschlusspunkt einstellen. Der Offset zum Verschlusspunkt gibt an, wie weit die Kammern 1 und 5 geschlossen werden dürfen.

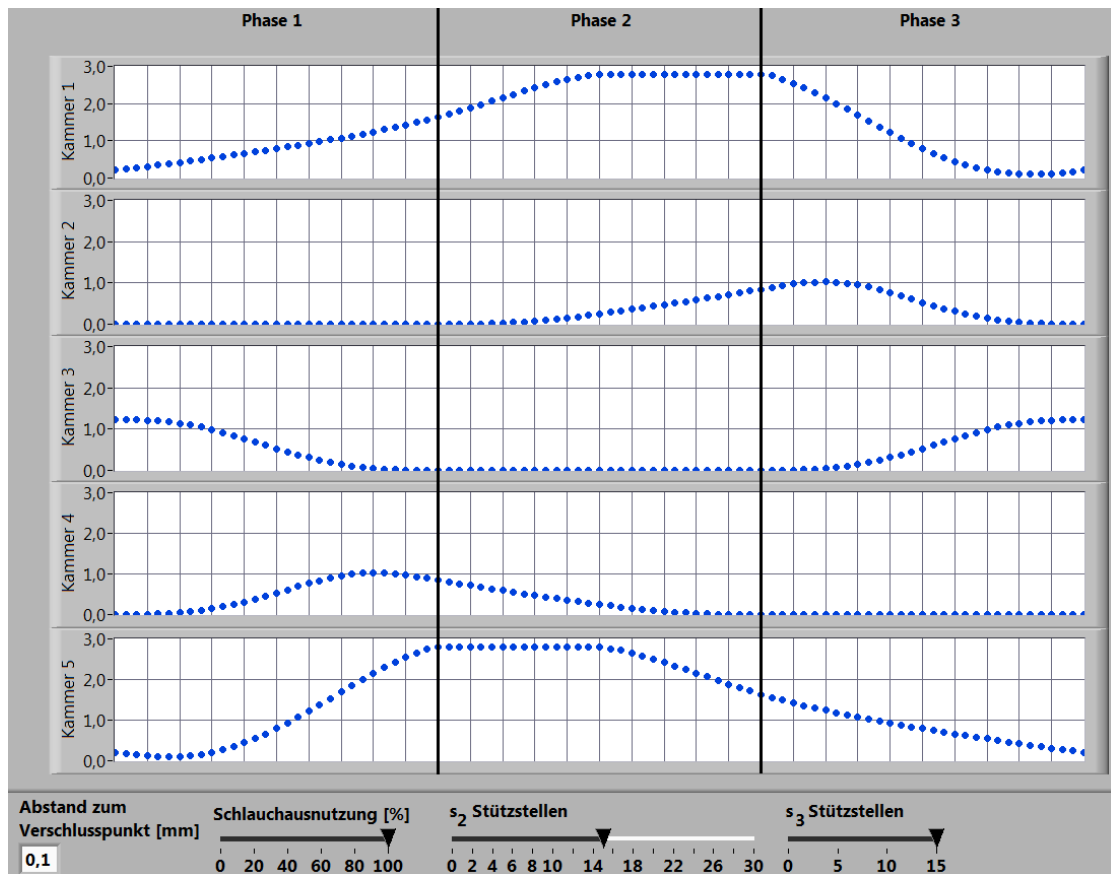


Abbildung 48: Ausschnitt aus der Benutzeroberfläche des Programms „Steuerkurvengenerator“. Dargestellt sind die anhand des Phasenplanes und der Kammercharakteristik berechneten Stößelhubverläufe.

Die für die Linearantriebe benötigten Steuerkurven werden von der Software aus den berechneten Stößelhubverläufen generiert. Die Steuerkurven enthalten ausschließlich die Information über die relative Positionsänderung zwischen zwei Stützstellen. Im Gegensatz zu den Stößelhubverläufen nehmen die Stützstellen der Steuerkurven sowohl positive als auch negative Werte an, wobei sich diese Richtungsinformation nicht auf den Stößelhub, sondern auf die Bewegungsrichtung der Linearantriebe bezieht.

Für die Übertragung der Steuerkurven an das Programm „Steuerkurvenoptimierung“ wurde die bestehende Datei aus dem Programm „Kammercharakterisierung“ kumulativ um die Steuerkurven ergänzt. Zusätzlich wurde in der Datei der aus der Berechnung der Stößelpositionen resultierende maximale Stößelhub der Kammern 1 und 5 (ist identisch) hinterlegt, da dieser für die Berechnung der Startpositionen vom Programm „Steuerkurvenoptimierung“ benötigt wird.

### 5.4.3 Steuerkurvenoptimierung

Für die Überprüfung und Optimierung der Steuerkurven wurde das LabView-Programm „Steuerkurvenoptimierung“ entwickelt. Das Programm nutzt die zuvor generierten Steuerkurven zur Positionierung der fünf Linearantriebe indem es in Abhängigkeit der gewählten

Arbeitszyklusdauer die erforderlichen Soll-Geschwindigkeiten der Antriebe steuert. Parallel dazu liest das Programm das Signal des Massenflusssensors aus und stellt dies in einem Diagramm phasengleich mit einer der Steuerkurven dar, wie aus Abbildung 49 ersichtlich. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit ist die Darstellung im Diagramm auf jeweils eine Steuerkurve beschränkt. Die Darstellung kann im Programm zwischen den Steuerkurven der Kammern 3 bis 5 umgeschaltet werden.



Abbildung 49: Graphische Benutzeroberfläche des Programms „Steuerkurvenoptimierung“. Das Programm bietet eine überlagerte Darstellung der Steuerkurven mit dem gemessenen Massenflussverlauf, wobei sich die Stützstellen der angezeigten Steuerkurve in 1  $\mu\text{m}$  Schritten per Mauseingabe verändern lassen.

Mit dem Start einer Messung werden die Startpositionen aller Linearantriebe anhand der vorliegenden Steuerkurven berechnet. Als Bezugspunkt dienen die Verschlusspunkte der Kammern. Im Fall der Kammern 1 und 5 fließt zusätzlich deren maximaler Stößelhub in die Berechnung ein. Darüber hinaus sorgt die Software bei jedem Richtungswechsel der Linearantriebe für eine automatische Kompensation des Umkehrspiels. Erfolgt der Richtungswechsel nach einer Rastposition, so wird der Antrieb während der letzten Stützstelle der Rastposition bereits um den Betrag des Umkehrspiels in die künftige Richtung bewegt. Erfolgt dagegen der Richtungswechsel im Bewegungsverlauf, dann wird zu der Stützstelle mit der neuen Richtung der Betrag des Umkehrspiels addiert.

Für die empirische Steuerkurvenoptimierung lassen sich die im Diagramm angezeigten Stützstellen per Mauseingabe in 1  $\mu\text{m}$  Schritten verändern, wobei durch die direkte Zuordenbarkeit der Stützstellen zum Massenflussverlauf eine intuitive Bedienbarkeit gegeben ist. Die Stützstellen sind so angezeigt, dass deren Vorzeichen dem von der betreffenden Kammer

erzeugten Effekt auf den Massenfluss entspricht. Das heißt, bei einem positiven Wert schließt sich die Kammer und gibt Fluid ab und umgekehrt.

Die Stützstellen der Steuerkurven der Kammern 1 und 2 werden aus den Steuerkurven der Kammer 5 beziehungsweise 4 berechnet. Für Kammer 3 sind ausschließlich die Stützstellen der Phase I einstellbar. In Phase II bleibt die Kammer 3 zwingend durchgängig geschlossen, so dass alle Stützstellen den Wert Null besitzen. Die Stützstellen der Phase III werden aus den Stützstellen der Phase I berechnet. Nach jeder Änderung einer der Stützstellen werden alle davon abhängigen Größen (Startpositionen, Steuerkurven) durch die Software automatisch angepasst.

Damit sich eine Pumpkammer nach dem Durchlaufen eines kompletten Zyklus wieder in ihrem Ausgangszustand befindet, muss die Summe der Werte aller Stützstellen einer Steuerkurve stets Null ergeben. Nur dann ist die Steuerkurve ausgeglichen. Während der Stützstellenmanipulation erfolgt softwareseitig eine Bilanzüberwachung, welche erst bei ausgeglichener Bilanz ein Starten der Pumpe zulässt. Da im Zuge der Stützstellenmanipulation die Bilanz zeitweilig „gestört“ wird, ist eine Veränderung der Stützstellen im laufenden Pumpbetrieb softwareseitig unterbunden. Der Bilanzausgleich kann manuell vorgenommen werden, durch entsprechende Veränderung der Stützstellen. Alternativ bietet die Software auch einen teilautomatischen Bilanzausgleich, bei welchem der Nutzer die Phase auswählt, in welcher der Bilanzausgleich vorgenommen werden soll. Dabei besteht die Möglichkeit, einzelne Stützstellen dieser Phase gegen die automatische Veränderung zu sperren. Für den Bilanzausgleich wird eine vorliegende Hubdifferenz in  $1\text{ }\mu\text{m}$  „Portionen“ gleichmäßig auf Stützstellen der gewählten Phase verteilt, beginnend mit der ersten Stützstelle der Phase.

### Driftkompensation

Von der Software „Steuerkurvenoptimierung“ werden anhand der Steuerkurven die Soll-Geschwindigkeiten der Antriebe berechnet und in einem von der gewählten Arbeitszyklusdauer und der Stützstellenanzahl abhängigen Zeitraster an die Motorsteuerungen gesendet. Die Bewegung zwischen zwei Stützstellen erfolgt dabei mit einer konstanten Geschwindigkeit. Ändert sich diese Geschwindigkeit an der nächsten Stützstelle, so erfolgt die Geschwindigkeitsanpassung mit einer endlichen Beschleunigung, was zu einer systematischen Abweichung zwischen der durch die Steuerkurven vorgegebenen und der tatsächlich ausgeführten Antriebsbewegung führt. Diese systematische Abweichung wird zusätzlich von einer zufälligen Abweichung überlagert, welche daraus resultiert, dass es sich bei dem verwendeten Betriebssystem (Windows 7 Professional) nicht um ein echtzeitfähiges System handelt. Die in den LabView Programmen verwendeten zeitgesteuerten Schleifen werden vom Betriebssystem mit hoher Priorität behandelt, weshalb die Startzeitpunkte für die Schleifendurchläufe sehr genau

eingehalten werden. Allerdings schwankt die Bearbeitungszeit der in den Schleifen ausgeführten Prozesse. Um ein etwaiges „Driften“ der Antriebspositionen zu verhindern, werden die Antriebe während der in den Steuerkurven vorgegebenen Rastpositionen (Geschwindigkeit 0) gezielt in die dafür berechneten Positionen gefahren.

### Antriebspositionen

Mit der Aufzeichnung der Antriebspositionen wird überprüft, wie stark die tatsächlich ausgeführte Antriebsbewegung aufgrund des zwangsweise auftretenden Beschleunigungsverhaltens der Antriebe von der anhand der Steuerkurven beschriebenen Antriebsbewegung abweicht. Dazu zeichnet die Software vor jedem Senden der neuen Sollgeschwindigkeiten die aktuellen (Motor-)Positionen der fünf Linearantriebe auf. Entsprechend der 90 Stützstellen der Steuerkurven werden während eines Arbeitszyklus 90 Antriebspositionen ausgelesen. Bei mehrmaligem Durchlaufen des Arbeitszyklus werden diese Positionen jeweils durch die aktuellen Positionen überschrieben.

## **5.5 Kurvenscheibenauslegung**

Um die Pumpe mit einem Zentralantrieb in Form einer Nockenwelle zu betreiben, müssen die auf der Welle befindlichen Kurvenscheiben so beschaffen sein, dass mit ihnen dieselben Stößelbewegungen wie mit den Linearantrieben erzeugt werden. Allerdings entsprechen die Bewegungen der Linearantriebe nicht exakt den tatsächlich ausgeführten Stößelbewegungen. Die mit den Linearantrieben tatsächlich erzeugten Stößelbewegungen weichen infolge verschiedener Ursachen von den aufgezeichneten Antriebspositionen ab. Daher ist es für die korrekte Berechnung der Kurvenscheiben erforderlich, zuvor die von den Stößeln ausgeführten Bewegungen zu bestimmen.

### **5.5.1 Messung der tatsächlichen Stößelbewegung**

Einfluss auf die tatsächliche Stößelbewegung haben die Fertigungstoleranzen der verwendeten Gewindespindeln (Steigungsfehler) sowie die strukturelle Elastizität der verwendeten Linearantriebe, wobei letztere insbesondere durch die gewählte Konstruktionsweise der Linearantriebe bedingt ist. Anstelle eines Portalaufbaus, bei welchem die Achsen der Kraftübertragung vom Motor zum Stößel kollinear verlaufen würden, sind die Traversen als „Galgen“ ausgeführt. Ursächlich dafür war ein später nicht weiter verfolgter Ansatz einer miniaturisierten Pumpe, gemäß dem die Antriebe mit einem Mittenabstand von 20 mm zueinander positioniert wurden. Aufgrund der Abmessungen der verwendeten Motoren war dabei die Ausführung der Linearantriebe im Portalaufbau nicht möglich.



Durch die exzentrische Krafteinleitung über den Hebelarm (Abbildung 50) wirkt auf die Traverse ein Kippmoment, welches von den Linearlagern aufgenommen werden muss. In Folge der endlichen Steifigkeit der verwendeten Linearlager kippt daher die Traverse in Abhängigkeit der vom Stößel übertragen Gegenkraft, was dazu führt, dass motorseitig eine größere Stößelbewegung angenommen wird, als tatsächlich am Stößel vorliegt.

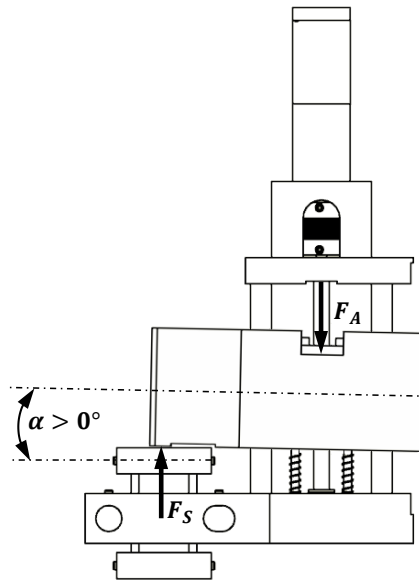


Abbildung 50: Verkippung der Traverse in Folge exzentrischer Krafteinleitung. Da die Gegenkraft des Stößels  $F_S$  und die über den Antrieb eingeleitete Kraft  $F_A$  nicht kollinear verlaufen, wirkt auf die Traverse ein Drehmoment. Das Drehmoment wird von den Linearführungen aufgenommen, verursacht dabei jedoch eine elastische Verformung der Führungskomponenten.

Für eine möglichst exakte Erfassung der Stößelbewegungen erfolgte eine gesonderte Messung mit einer Digitalmessuhr des Typs MahrCator 1075 R (Genauigkeit  $5\text{ }\mu\text{m}$  auf  $12,5\text{ mm}$ ; Mahr GmbH Deutschland) mit einer Auflösung von  $1\text{ }\mu\text{m}$ . Wie der Abbildung 51 zu entnehmen, wurden die Stößelpositionen indirekt über die Positionen der in den Linearantrieben befindlichen Trapeze gemessen, da die Stößel selbst für eine Positionsmessung nicht zugänglich waren. Etwaige Abweichungen zwischen der Trapez- und Stößelbewegung waren vernachlässigbar, da die Kraftübertragung zwischen Trapez und Stößel zentrisch und spielfrei erfolgte und die Trapeze in der Belastungsrichtung eine hohe Steifigkeit besaßen. Gemessen wurden die Trapezpositionen der Kammern 3, 4 und 5.



Abbildung 51: Aufbau zur indirekten Messung der Stößelbewegung mittels Digitalmessuhr. Da die Stößel für eine Messung nicht zugänglich waren, wurde die Bewegung der die Stößel betätigenden Trapeze (Pfeil) gemessen.

Infolge der verzögerten Reaktion der Messuhr erfolgten die Messungen nicht im kontinuierlichen Pumpbetrieb, sondern mit dem LabView-Programm „Messung Stößelpositionen“, in welchem die Antriebe in die mit dem Programm „Steuerkurvenoptimierung“ aufgezeichneten 90 Antriebspositionen gefahren wurden. Bei jeder Messung wurden auch die vier nicht von der Messuhr erfassten Stößel betätigt, um etwaige elastische Verformungen des Prototyps mit zu berücksichtigen. Die angefahrenen Positionen wurden für 4 Sekunden gehalten, bevor die Messung mit der Messuhr erfolgte und die nächsten Positionen angefahren wurden.

Für die Bestimmung der tatsächlichen Stößelbewegungen wurden zunächst mit der Software „Steuerkurvenoptimierung“ drei separate Antriebspositionsverläufe der optimierten Steuerkurven aufgezeichnet. Mit jedem dieser drei Antriebspositionsverläufe erfolgten wiederum drei Messungen der Trapezpositionen mit der Messuhr, so dass im Ergebnis für die Kammer 3 bis 5 jeweils 9 Trapezpositionsverläufe vorlagen. Aus diesen wurde der für Kammer repräsentative Trapezpositionsverlauf berechnet, indem aus den 9 Messwerten an einer Stützstelle der Median gebildet wurde.

### 5.5.2 Kurvenscheibenberechnung

Für die Ausstattung der Pumpe mit einem Zentralantrieb wurden die Stößelbewegungen auf einer Nockenwelle hinterlegt. Bei einem Nocken handelt es sich um eine Kurvenscheibe mit Außenkontur. Die für deren Berechnung benötigten kinematischen Größen sind in Abbildung 52 dargestellt, und die verwendeten Formeln sind in A15 hinterlegt.

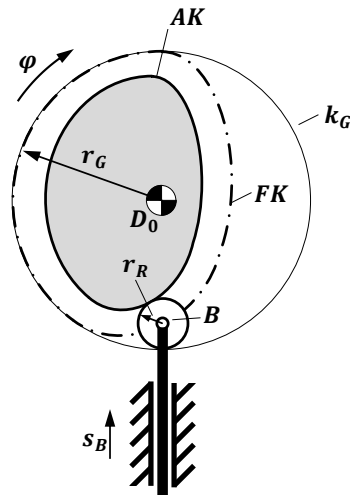


Abbildung 52: Schema eines Kurvengetriebes mit Rollenstößel:  $D_0$  - Kurvenscheibendrehpunkt,  $B$  - Rollenmittelpunkt des Eingriffsgliedes,  $r_R$  - Rollenradius des Eingriffsgliedes,  $k_G$  - Grundkreis,  $r_G$  - Grundkreisradius,  $FK$  - Führungskurve,  $AK$  - Arbeitskurve,  $s_B$  - lineare Bewegung des Eingriffsgliedes,  $\varphi$  - Drehwinkel der Kurvenscheibe. Abbildung modifiziert nach Volmer 1995, S. 165.

#### Berechnung

Für die Kurvenscheibenberechnung wurde die Software „Kurvenscheibengenerator“ erstellt, deren grafische Oberfläche in der Abbildung 53 dargestellt ist. Die Software berechnet aus den repräsentativen Stößelbewegungen die Führungs- und Arbeitskurve der entsprechenden Kurvenscheibe. Die Berechnung erfolgt unter Berücksichtigung des Grundkreisradius  $r_G$ , des Rollenradius  $r_R$  und des sich aus der Anzahl der Stützstellen ergebenden Winkel-Inkrementes  $\Delta\varphi$ . Zusätzlich zeigt die Software den kleinsten konvexen Radius der Arbeitskurve als „kritischen Radius“ an.

Als Grundkreisradius  $r_G$  wurde ein Wert von 18,5 mm gewählt. Der gemessene Außendurchmesser der in den Stößelgruppen verwendeten Rillenkugellager des Typs MR52 ZZ betrug 4,95 mm (nominal 5 mm). Dementsprechend wurde für die Berechnungen ein Rollenradius  $r_R$  von 2,475 mm angesetzt.

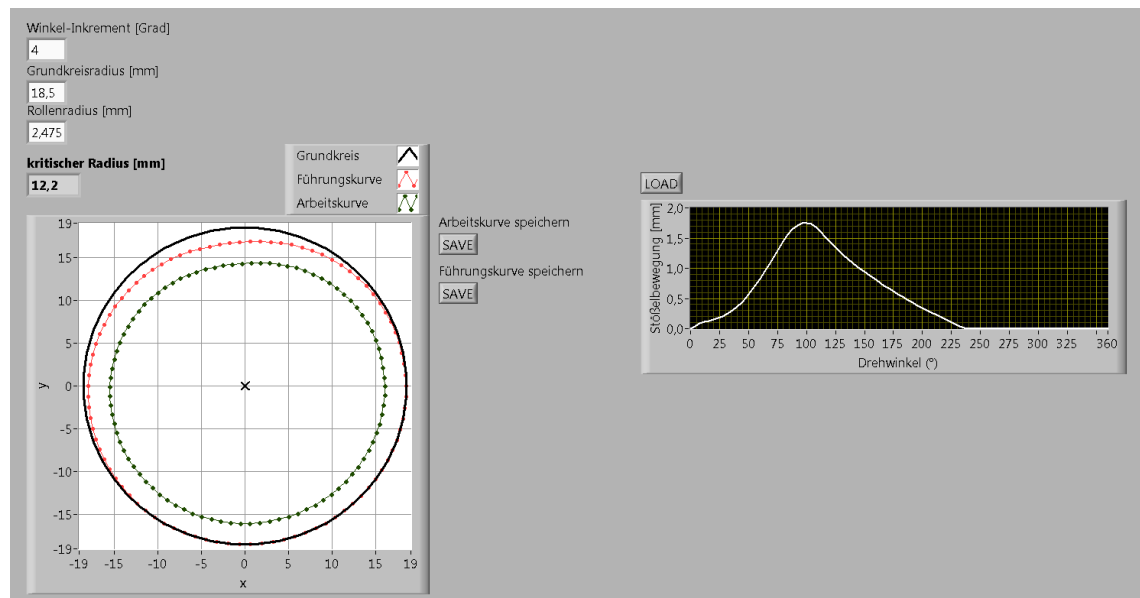


Abbildung 53: Grafische Oberfläche der Software „Kurvenscheibengenerator“. In Abhängigkeit von Grundkreis- und Rollenradius berechnet das Programm anhand der repräsentativen Stößelbewegung die Arbeits- und Führungskurve. Zusätzlich wird der kleinste konvexe Führungskurvenradius als „kritischer Radius“ angezeigt.

Für die anschließende Nockenkonstruktion wurden die Stützstellen der Arbeitskurven der Kammern 3 bis 5 in ein CAD-Programm (Autodesk Inventor Professional 2012, Autodesk Inc.; USA) importiert und mittels Spline-Funktion die geschlossene Kontur der Arbeitskurve generiert. Es wurden drei unterschiedliche Nocken mit den Bezeichnungen N1, N2 und N3 konstruiert. Die Steuerung von Kammer 3 erfolgte mit dem Nocken N3. In Folge der in Kapitel 4.1.2 festgelegten Symmetrie des Phasenplanes ließen sich die Kammern 1 und 5 sowie die Kammern 2 und 4 jeweils mit Nocken des gleichen Typs steuern. Dazu wurden die Nocken für die Kammern 1 und 2 jeweils gegenläufig zu den Nocken der Kammern 4 und 5 montiert. Für die Kammern 1 und 5 wurden die Nocken mit der Bezeichnung N1 und für die Kammern 2 und 5 die Nocken mit der Bezeichnung N2 verwendet.

## 5.6 Pumpencharakterisierung

Während mit den Linearantrieben lediglich ein geringer Bereich der Arbeitszyklusfrequenz von 0,01 Hz bis 0,1 Hz abgedeckt wird, lässt sich die Pumpe mit der Nockenwelle bis zu einer Drehzahl von 3 Hz betreiben.

Im Rahmen der Pumpencharakterisierung wurde überprüft, ob und in welcher Qualität die zuvor mit den Linearantrieben optimierten Stößelbewegungen mit dem Nockenwellenantrieb reproduziert werden können. Außerdem wurden die Flussrate und das Pulsationsverhalten in Abhängigkeit von der Nockenwellendrehzahl und des anliegenden Gegendrucks untersucht. Als Fluid wurde Wasser verwendet. Für die Steuerung der Nockenwellendrehzahl sowie die

Darstellung von Massenfluss und Druck wurde ein LabView-Programm („Pumpencharakterisierung“) erstellt. Die Messungen erfolgten mit dem in Abbildung 45 schematisch dargestellten Aufbau, wobei der Drucksensor am Pumpenausgang platziert war. Für die Messungen der Gegendruckabhängigkeit wurde das im Aufbau enthaltene Drosselventil genutzt.

Zum Vergleich des Prototyps mit den derzeit gebräuchlichen Schlauchrollenpumpen, wurden zwei verschiedene Schlauchrollenpumpen in gleicher Weise wie der Prototyp charakterisiert. Getestet wurden eine Schlauchrollenpumpe des Typs perISYS I (cetoni GmbH, Deutschland) mit einem 5-Rollen-Rotor sowie eine Schlauchrollenpumpe des Typs REGLO Digital MS-2/12 (Cole-Parmer GmbH, Deutschland) mit einem 12-Rollen-Rotor. Beide Pumpen sind in Abbildung 54 dargestellt.

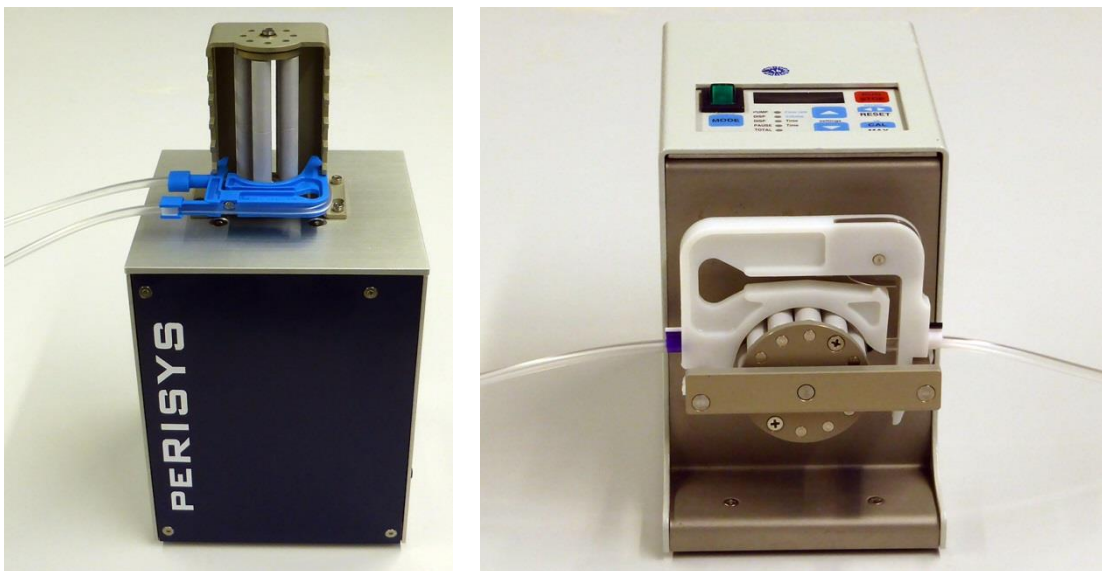


Abbildung 54: Dargestellt sind die getesteten Schlauchrollenpumpen.

links: Pumpe mit 5-Rollen-Rotor; rechts: Pumpe mit 12-Rollen-Rotor

Die Schlauchrollenpumpe mit dem 5-Rollen-Rotor wurde mit einem Pumpschlauch des Typs Tygon S3 E-LFL ausgestattet. Es handelt sich dabei um den gleichen Schlauchtyp, mit welchem die Steuerkurvenableitung und -optimierung im Prototyp erfolgte. Für die Schlauchrollenpumpe mit dem 12-Rollen-Rotor konnte dieser Schlauch nicht verwendet werden, da diese Pumpe für Schläuche mit einem Stopperabstand von 75 mm konzipiert ist. Aus diesem Grund wurde ein Schlauch des Typs FUT-3748-18 (Material PVC, 59 Shore A, Pulse Instrumentation, USA) verwendet, welcher denselben Innen- und Außendurchmesser wie der Tygonschlauch aufwies. Die Charakterisierung des Prototyps erfolgte zunächst mit demselben Schlauch (Tygon S3 E-LFL), welcher auch für die Steuerkurvenoptimierung verwendet wurde. Da bei allen drei Pumpen der systematische Massenflussverlauf von zufälligen Schwankungen überlagert war, wurden jeweils 10 Messungen durchgeführt und daraus der Mittelwert gebildet.

Darüber hinaus wurde für den Prototyp die Wiederholgenauigkeit durch das Einlegen des Schlauches in die Pumpe getestet. Dazu wurde der Schlauch aus der Pumpe entnommen, erneut in die Pumpe eingesetzt und anschließend der Massenflussverlauf bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz gemessen. Dies wurde dreimal wiederholt.

Abschließend wurde der Prototyp mit jeweils drei (neuen) Schläuchen vom Typ Tygon 2001 sowie Tygon S3 E-LFL getestet. Mit den Tygon S3 E-LFL Schläuchen wurde die Reproduzierbarkeit des Massenflussverlaufs bei der Verwendung gleichartiger Schläuche getestet. Mit den Tygon 2001 Schläuchen wurde getestet, wie gut die für den Tygon S3 E-LFL Schlauch optimierten Steuerkurven auf Schlauchtypen von gleicher Geometrie (Innendurchmesser, Wandstärke), aber anderem Schlauchmaterial übertragbar sind. Für die Schläuche wurde der Massenfluss in Abhängigkeit der Nockenwellendrehzahl mit  $n = 1$  gemessen. Abbildung 55 zeigt den mit Nockenwellenantrieb ausgerüsteten Prototyp.

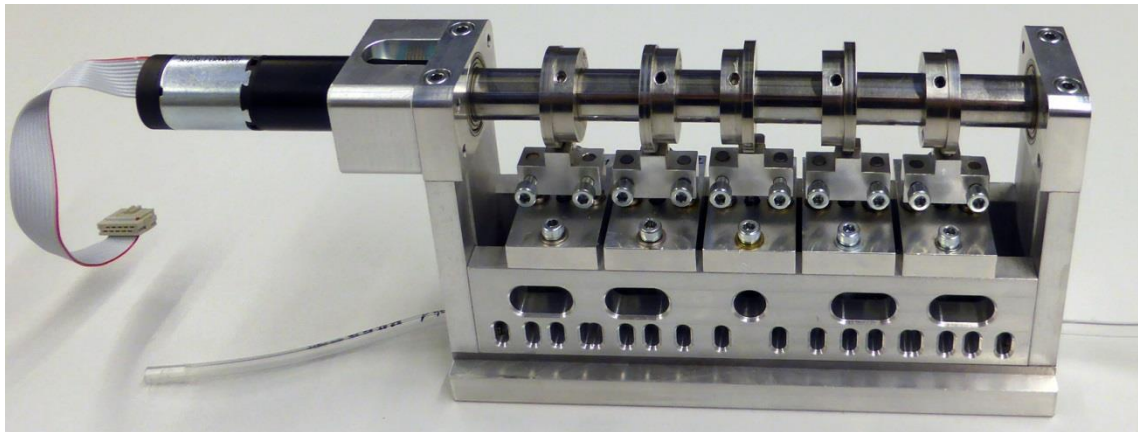


Abbildung 55: Prototyp der linearen Schlauchpumpe in der Konfiguration mit Nockenwellenantrieb.

## 6 Ergebnisse der Validierung des Pumpenmodells

### 6.1 Überprüfung des Okklusionsmodells

Im Experiment wurde das Verdrängungsverhalten der in Tabelle 2 aufgeführten Rollenpumpenschläuche mit 2,79 mm Innendurchmesser untersucht. Dazu wurden diese mittels eines 9 mm sowie eines 15 mm langen Stößels okkludiert und die dabei aus den Schläuchen verdrängte Fluidmasse sowie der Stößelweg gemessen. Anhand der Dichte des verwendeten Fluides (Öl) von 0,86 g/ml (bei 20 °C) erfolgte anschließend die Umrechnung der Fluidmasse in das Fluidvolumen. In Abbildung 56 sind die Verläufe der aus den Schläuchen verdrängten Volumina in Abhängigkeit vom Stößelweg dargestellt. Zusätzlich zu den Messwerten enthält die Abbildung den theoretisch zu erwartenden Verlauf, welcher sich einstellt, wenn das während der Okklusion im Schlauch verbleibende Volumen ( 14 ) von dem im unverformten Schlauch enthaltenen Volumen ( 333 ) subtrahiert wird.

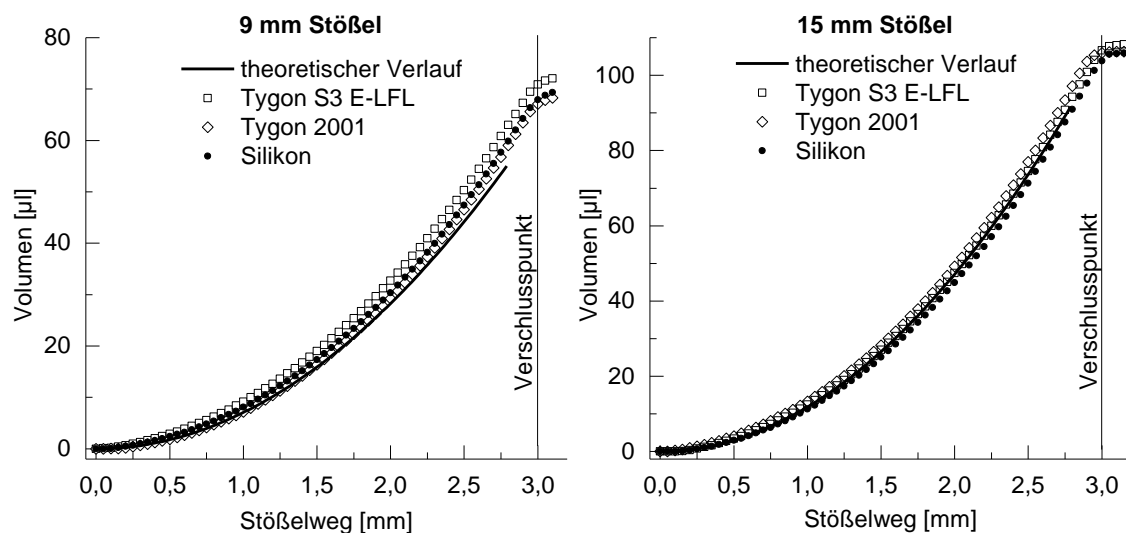


Abbildung 56: Volumen-Stößelweg-Verläufe der getesteten Schläuche. Dargestellt sind die Mittelwerte der Messungen sowie der gemäß des Modells (Kapitel 4.2.1) zu erwartende Verlauf des aus dem Schlauch verdrängten Volumens. Das Erreichen des Verschlusspunktes ist am Abflachen des Anstieges der Volumen-Stößelweg-Verläufe zu erkennen

Wie zu erkennen, sind die Volumen-Stößelweg-Verläufe der getesteten Schläuche ähnlich. Die Verschlusspunkte der Schläuche sind daran zu erkennen, dass ab einem gewissen Stößelweg kein weiteres Volumen aus den Schläuchen verdrängt wurde, da diese vollständig okkludiert waren. Bei den gemessenen Volumen-Stößelweg-Verläufen trat der Verschlusspunkt etwa 200 µm später ein als im Modell vorhergesagt. Auch wurde aus allen Schläuchen mehr Volumen verdrängt als vom Modell vorhergesagt.



In Abbildung 57 sind die bis zum Erreichen der Verschlusspunkte aus den Schläuchen verdrängten Volumina im Vergleich mit dem gemäß ( 333 ) im unverformten Schlauchabschnitt enthaltenen geometrischen Volumen dargestellt.

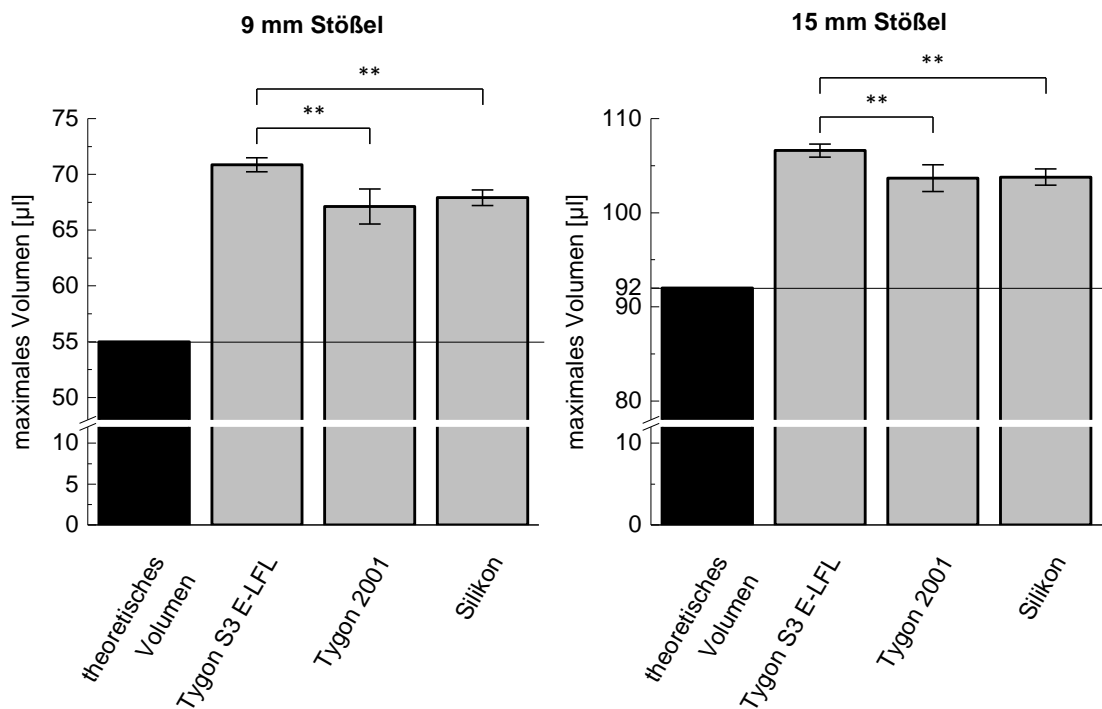


Abbildung 57: Darstellung des aus den Schlauchproben verdrängten Fluidvolumens im Vergleich zu dem im Schlauchabschnitt theoretisch enthaltenen Volumen. Signifikante Unterschiede zwischen den Schläuchen sind mit „\*\*“ gekennzeichnet. (U-Test, \*\*p < 0,01, n = 5)

Die Ursache für das zusätzlich verdrängte Volumen bestand darin, dass sich beim Zusammendrücken des Schlauches vor und nach dem Stößel die in Abbildung 58 gezeigten Flanken bildeten.

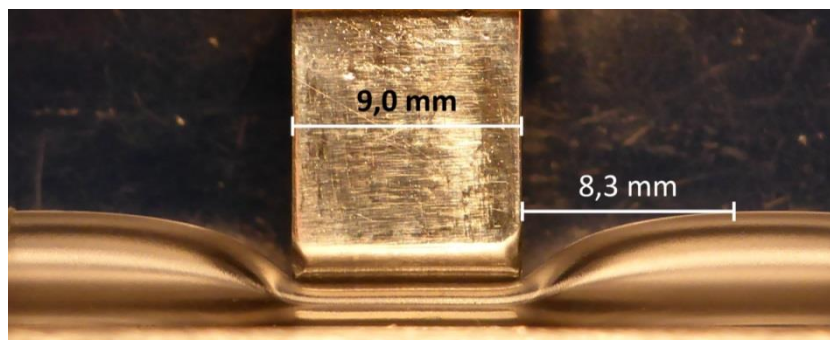


Abbildung 58: Vollständig okkludierter Tygon S3 E-LFL Schlauch. Die Ausdehnung der Schlauchflanke wurde in der Aufnahme mit der Software ZEN 2012 (blue edition, Carl Zeiss Microscopy GmbH, Deutschland) vermessen.

Gemäß der in Abbildung 58 gezeigten Aufnahme eines vollständig okkludierten Tygon S3 E-LFL Schlauches erstrecken sich die Schlauchflanken über mindestens 8 mm entlang der Schlauchlängsachse.



Der nach ( 32 ) berechnete Verlauf der durch die Schlauchflanken verdrängten Volumina ist in Abbildung 59 dargestellt.

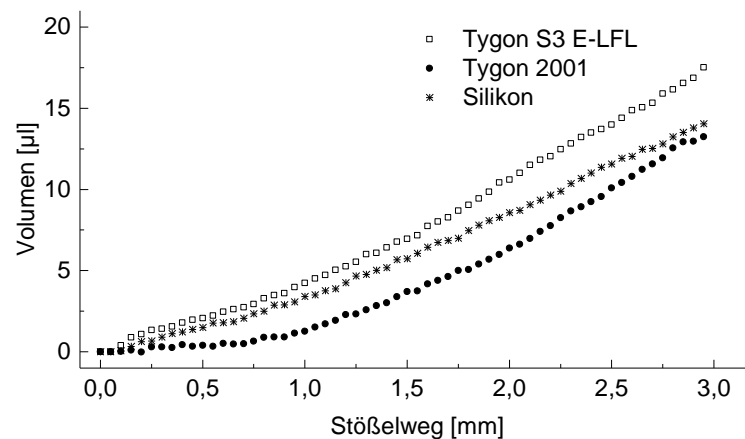


Abbildung 59: Gemäß ( 32 ) berechneter Verlauf des durch die Flanken verdrängten Volumens.

Alle drei Schläuche wiesen einen nichtlinearen Verlauf des Schlauchflankenvolumens auf und jeder Schlauch besaß seine eigene diesbezügliche Charakteristik.

In Abbildung 60 sind die Volumen-Stößelweg-Verläufe ohne das von den Flanken verdrängte Volumen dargestellt. Nach Abzug des Flankenanteils sind die Verläufe annähernd deckungsgleich. Sie ähneln dem vorhergesagten Verlauf, jedoch ist der Anstieg flacher als im Modell. Da die Verschlusspunkte im Experiment 200  $\mu\text{m}$  später erreicht wurden, sind dementsprechend auch die Volumenverläufe um diesen Wert entlang der Stößelweg-Achse gestreckt.

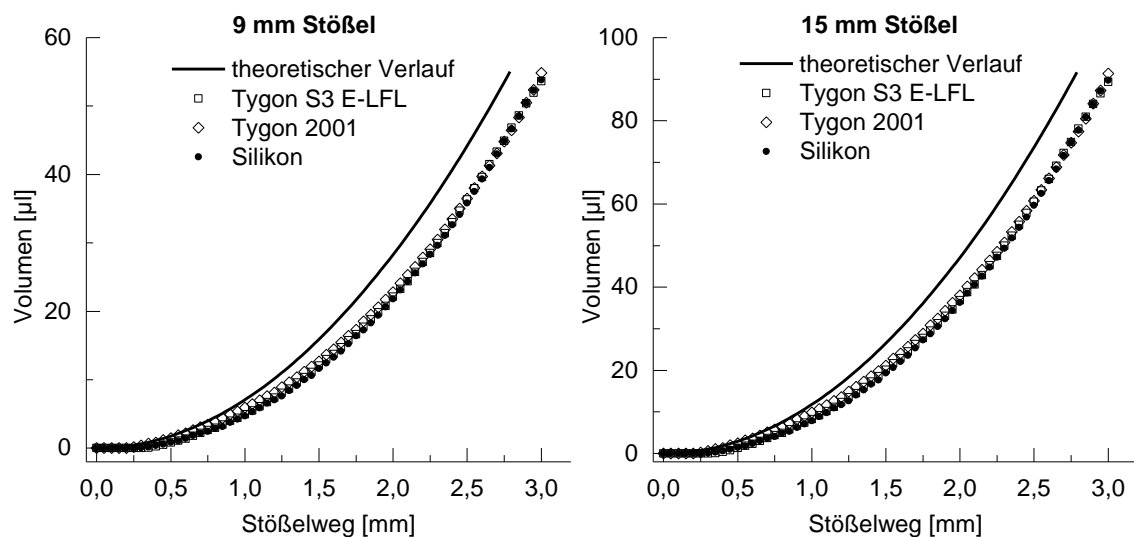


Abbildung 60: Volumen-Stößelweg-Charakteristik nach Abzug des gemäß ( 32 ) berechneten Flankenvolumens.

In Abbildung 61 sind die beim Erreichen der Verschlusspunkte verdrängten Volumina nach Abzug des Flankenanteils dargestellt. Für den Tygon 2001 Schlauch entsprechen die Volumina dem theoretisch im Schlauchabschnitt enthaltenen Volumen. Für den Tygon S3 E-LFL Schlauch und den Silikon Schlauch sind die aus den Daten berechneten Volumina geringfügig kleiner.

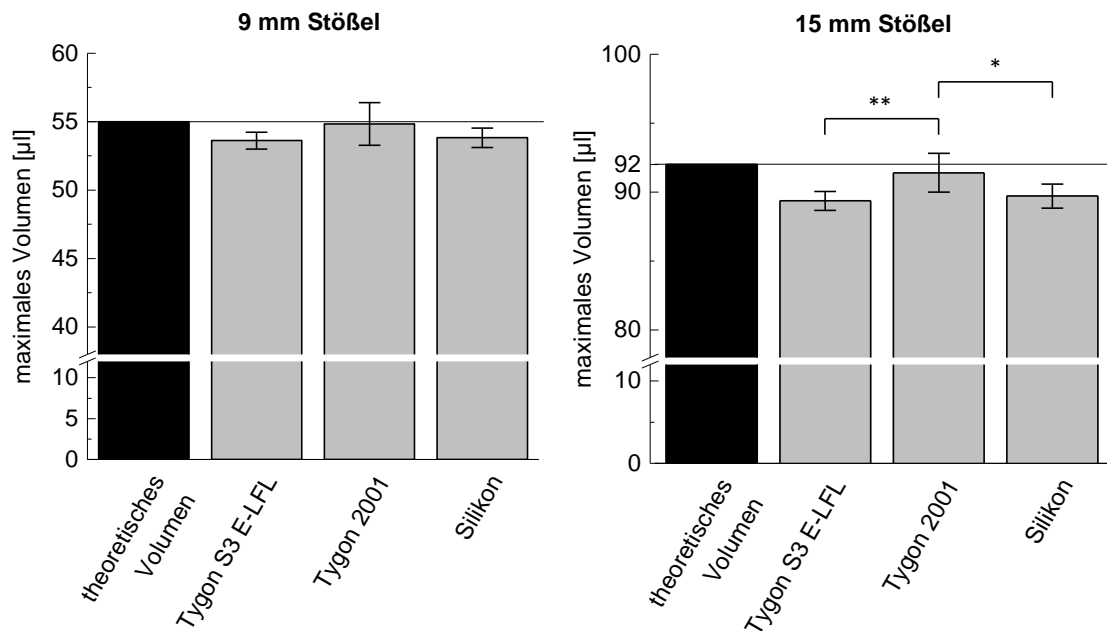


Abbildung 61: Aus dem Schlauch bis zum Verschlusspunkt verdrängtes Fluidvolumen nach Abzug des gemäß ( 32 ) berechneten Flankenvolumens, sowie im Vergleich dazu das im Schlauchabschnitt theoretisch enthaltene Volumen. Signifikante Unterschiede zwischen den Schläuchen sind mit „\*“ und „\*\*“ gekennzeichnet. (U-Test, \*p < 0,05, \*\*p < 0,01, n = 5)

## 6.2 Pumpenprototyp

### 6.2.1 Charakterisierung der Kammern

#### Verschlusspunkte

Für die Charakterisierung der Kammern wurden zuerst die Verschlusspunkte aller Kammern, wie in Kapitel 5.4.1 beschrieben, ermittelt. Die Antriebspositionen für die Verschlusspunkte der Kammern sind in Tabelle 4 aufgelistet.

Tabelle 4: Für die einzelnen Kammern ermittelte Verschlusspunktpositionen der Linearantriebe

Antrieb	Verschlusspunktposition absolut
Kammer 1	17,082 mm
Kammer 2	15,671 mm
Kammer 3	16,668 mm
Kammer 4	16,679 mm
Kammer 5	16,261 mm

Die unterschiedlichen Antriebspositionen resultieren daraus, dass in der mechanischen Kette der Kraftübertragung von der Traverse der Linearantriebe auf die Stößel bei jeder Kammer

montagebedingt individuelle Abstände zwischen den beteiligten Bauteilen vorlagen. Bei der späteren Umrüstung des Prototyps auf den Nockenwellenantrieb wurden die Abstände zwischen Kugellager und Stößel für die Einstellung der Verschlusspunkte verändert. Daher war die Gültigkeit der angegebenen Verschlusspunkte auf die Konfiguration des Pumpenprototyps zum Zeitpunkt der Kammercharakterisierung und der anschließenden Kennlinienoptimierung beschränkt.

### Kammercharakteristik

Für die Kammern 3, 4 und 5 wurde der während des Schließens der Kammern erzeugte Massenfluss gemessen und daraus die in der Kammer enthaltene Fluidmasse in Abhängigkeit vom Stößelhub berechnet. Abbildung 62 zeigt die Verläufe der verdrängten Massen in Abhängigkeit von der Antriebsposition. Die daraus abgeleitete Kammercharakteristik ist in Abbildung 63 dargestellt.

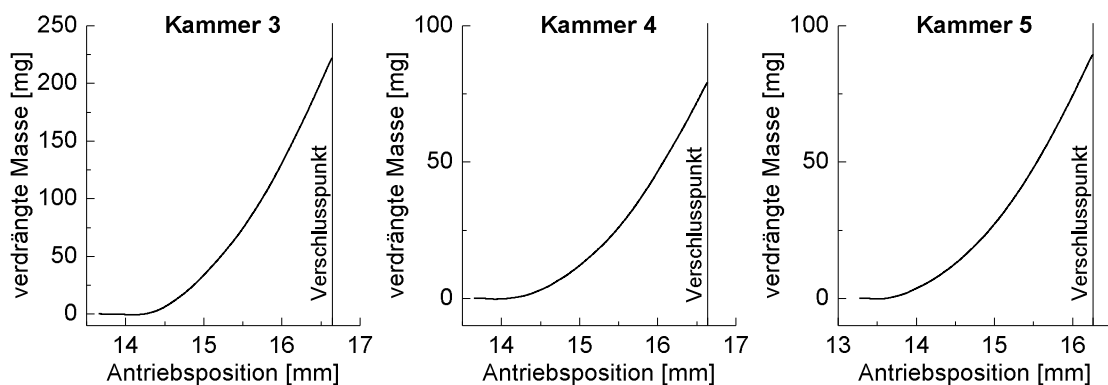


Abbildung 62: Darstellung der verdrängten Fluidmasse in Abhängigkeit der Antriebsposition. Für die Messung wurden die Kammern mit einer Geschwindigkeit von 0,05 mm/s geschlossen, bis der Verschlusspunkt erreicht war.

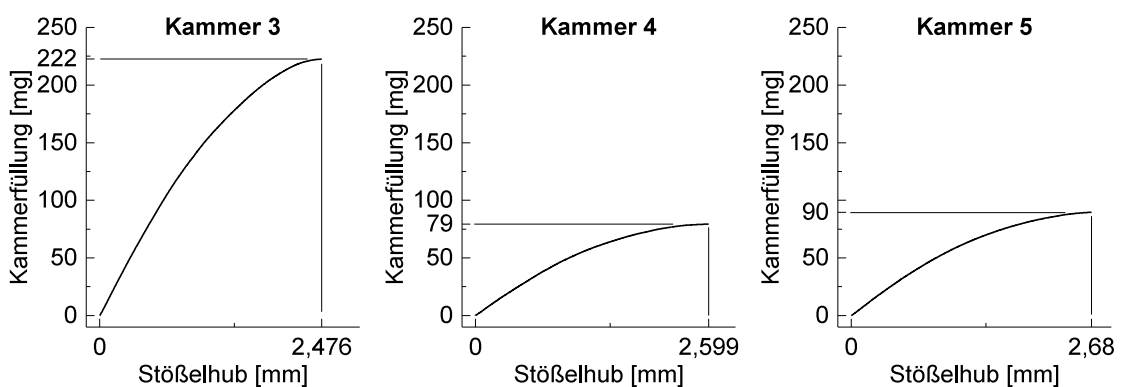


Abbildung 63: Aus den in Abbildung 62 dargestellten Messwerten berechnete Kammercharakteristik. Am Verschlusspunkt ist der Stößelhub Null.

Abbildung 64 zeigt die Größe der drei Kammern anhand der maximal verfügbaren Fluidmasse und des maximalen Stößelhubs. Bei den angegebenen Stößelhüben handelt es sich nicht um die

tatsächlich von den Stößeln ausgeführten Bewegungen, sondern um die aus der Antriebsposition angenommene Stößelbewegung.

Die in den Kammern 3 bis 5 enthaltenen maximalen Fluidmassen entsprechen einer seitens des Prototyps verfügbaren Kammergrößenverteilung von 3 : 1,1 : 1,2.

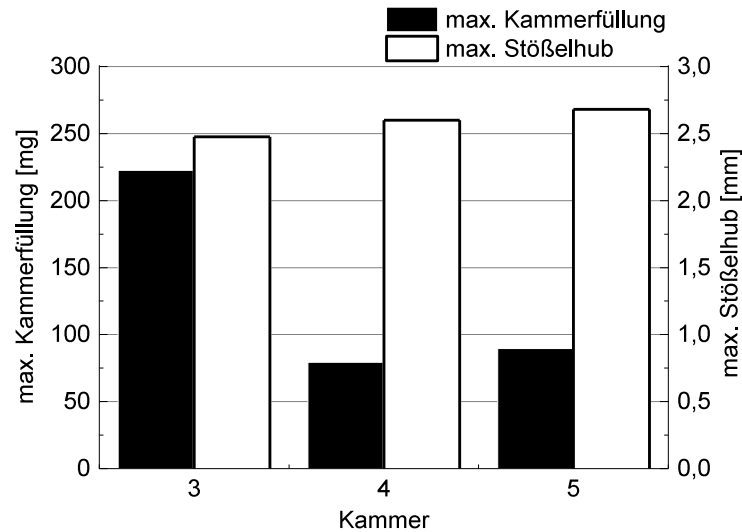


Abbildung 64: Darstellung der Kammergrößen anhand der enthaltenen Fluidmasse und des verfügbaren Stößelhub.

Für die anschließende Berechnung der Steuerkurven (Antriebsbewegung) wurden die in Abbildung 63 gezeigten Verläufe durch die folgenden Polynome zweiten Grades approximiert ( $R^2 > 0,999$ ), welche die in der Kammer enthaltene Fluidmasse  $m_{Fluid}$  [mg] in Abhängigkeit vom Stößelhub  $h$  [mm] beschreiben:

$$\text{Kammer 3:} \quad m_{Fluid} = -29,545 \frac{mg}{mm^2} \cdot h^2 + 163,018 \frac{mg}{mm} \cdot h$$

$$\text{Kammer 4:} \quad m_{Fluid} = -10,984 \frac{mg}{mm^2} \cdot h^2 + 59,097 \frac{mg}{mm} \cdot h$$

$$\text{Kammer 5:} \quad m_{Fluid} = -11,097 \frac{mg}{mm^2} \cdot h^2 + 63,172 \frac{mg}{mm} \cdot h$$

Die Abweichungen zwischen den berechneten und den gemessenen Fluidmassen sind in Abbildung 65 dargestellt. Dabei wird deutlich, dass das zur Beschreibung der Kammer 3 genutzte Polynom die in der Kammer enthaltene Fluidmasse im Bereich kleiner Stößelhübe (verschlusspunktnah) um bis zu 2,1 mg zu groß berechnet und im Bereich großer Stößelhübe um bis zu 2,3 mg zu gering berechnet. Für die Kammern 4 und 5 sind die durch die Polynome verursachten Fehler mit maximal 0,7 beziehungsweise 0,6 mg deutlich geringer, aber auch hier wird die Fluidmasse im Bereich kleiner Stößelhübe zu groß berechnet.

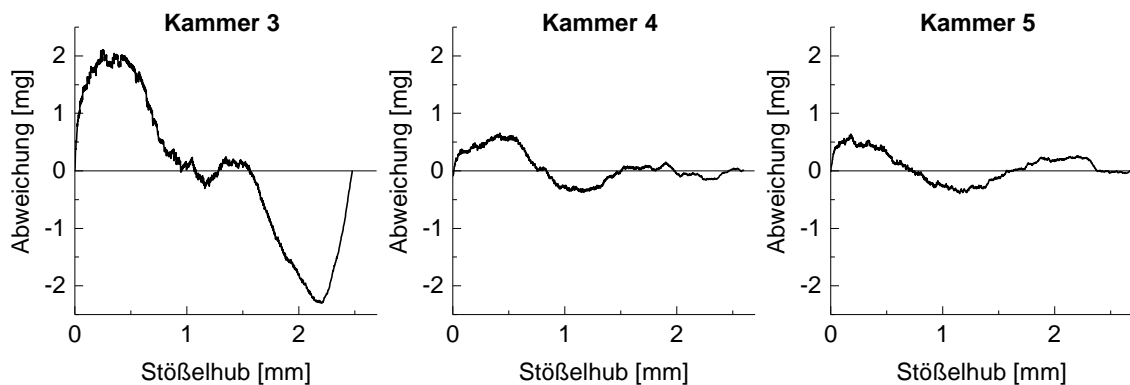


Abbildung 65: Abweichung zwischen dem zur Beschreibung der Kammercharakteristik benutzten Polynom und den Messwerten.

### 6.2.2 Steuerkurvenoptimierung

In Abbildung 66 sind die für die Optimierung verwendeten Steuerkurven dargestellt. Die Berechnung dieser Steuerkurven erfolgte für ein Offset von 200  $\mu\text{m}$  (Kammer 1 und 5) und eine maximale Schlauchausnutzung von 80 %. Für  $s_2$  wurden vier Stützstellen gewählt, was einem Phasenanteil von 13 % entspricht (vgl. berechnetes Optimum in Kapitel 4.1.5). Für  $s_3$  wurden 15 Stützstellen eingestellt, womit sich die entsprechenden Übergangsfunktionen über die gesamte Phase erstreckten.

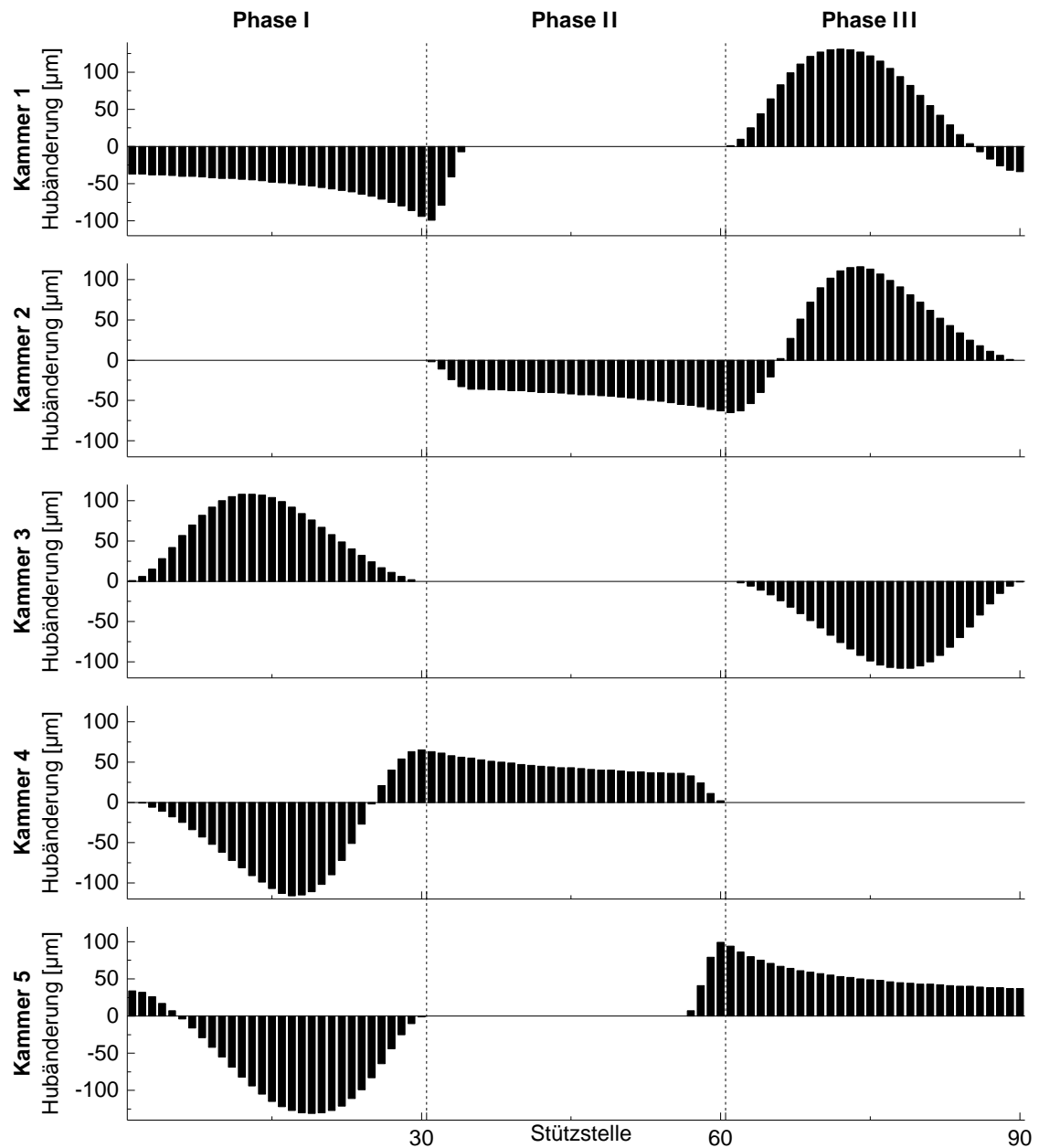


Abbildung 66: Berechnete Steuerkurven für die Kammern 1 bis 5. Jede Stützstelle beschreibt die relative Positionsänderung der Antriebe für einen Teilabschnitt des Phasenplanes. Die der Berechnung zugrunde liegenden Parameter waren: Begrenzung des Stößelhubs auf bis zu 80 % des maximal möglichen, Schließen der Kammern 1 und 5 bis maximal 200 µm über den Verschlusspunkt sowie ein Phasenanteil von 4 Stützstellen für  $s_2$  und 15 Stützstellen für  $s_3$ .

Der mit den berechneten Steuerkurven erzeugte Massenflussverlauf ist in Abbildung 67 dargestellt. Innerhalb der Phasen II und III war der Massenfluss annähernd konstant. Während der Phase I wurde dagegen kein durchgängig konstanter Massenfluss erzeugt. Des Weiteren nahm der Massenfluss jeweils in den Phasenübergängen kurzzeitig ab. Am stärksten ausgeprägt war diese Abnahme am Beginn der Phase I. Auf die Ursachen der Massenflussschwankungen wird genauer in Kapitel 7.2.1 eingegangen.

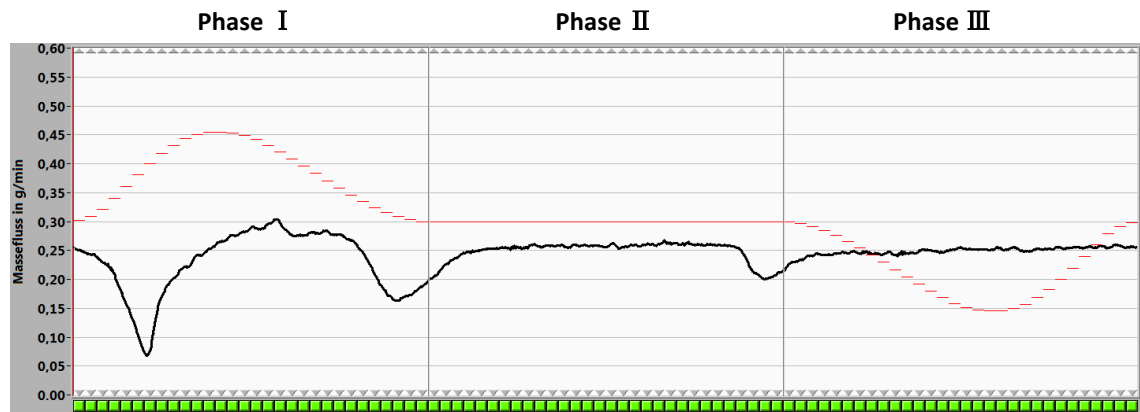


Abbildung 67: schwarz: Massenflussverlauf eines Arbeitszyklus für die in Abbildung 66 dargestellten Steuerkurven mit 200  $\mu\text{m}$  Offset, 80 % Stößelhub sowie  $s_2 = 13\%$  und  $s_3 = 50\%$ . Die Arbeitszyklusfrequenz betrug 1/30 Hz. rot: die Stützstellen der Steuerkurve des Antriebs der Kammer 3.

### Optimierung

Die Optimierung der in Abbildung 66 dargestellten Steuerkurven erfolgte in einem empirischen Prozess. Auf die Vorgehensweise und die gewonnenen Erkenntnisse wird in Kapitel 7.2.2 eingegangen. Der nach erfolgter Steuerkurvenoptimierung erzeugte Massenfluss ist in Abbildung 68 dargestellt. Die verbleibende Ungleichmäßigkeit betrug 10 %.

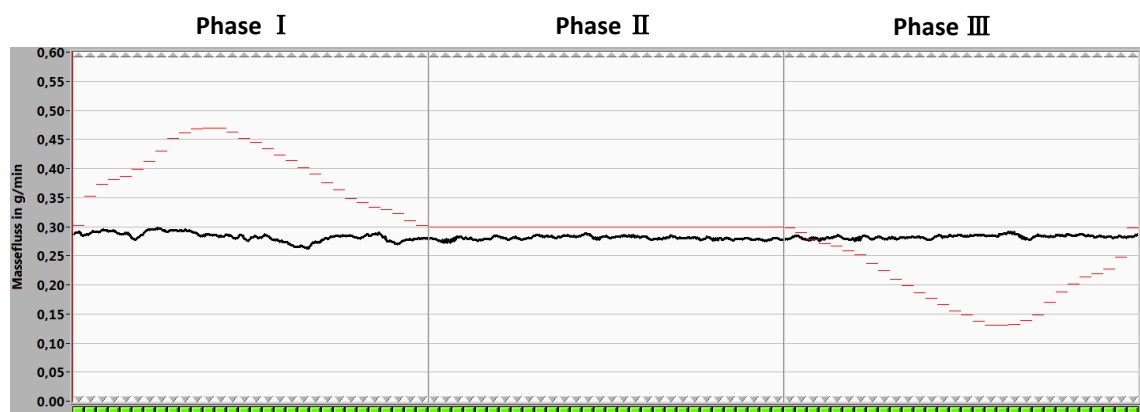


Abbildung 68: schwarz: Massenflussverlauf bei einer Arbeitszyklusfrequenz von 1/30 Hz. Nach Optimierung der in Abbildung 66 dargestellten Steuerkurven betrug die verbleibende Ungleichmäßigkeit 10 %, bei einem mittleren Massenfluss von 28 g/min. rot: Stützstellen der optimierten Steuerkurve des Antriebs von Kammer 3.

Abbildung 69 zeigt eine vergleichende Darstellung der berechneten und der optimierten Steuerkurven.

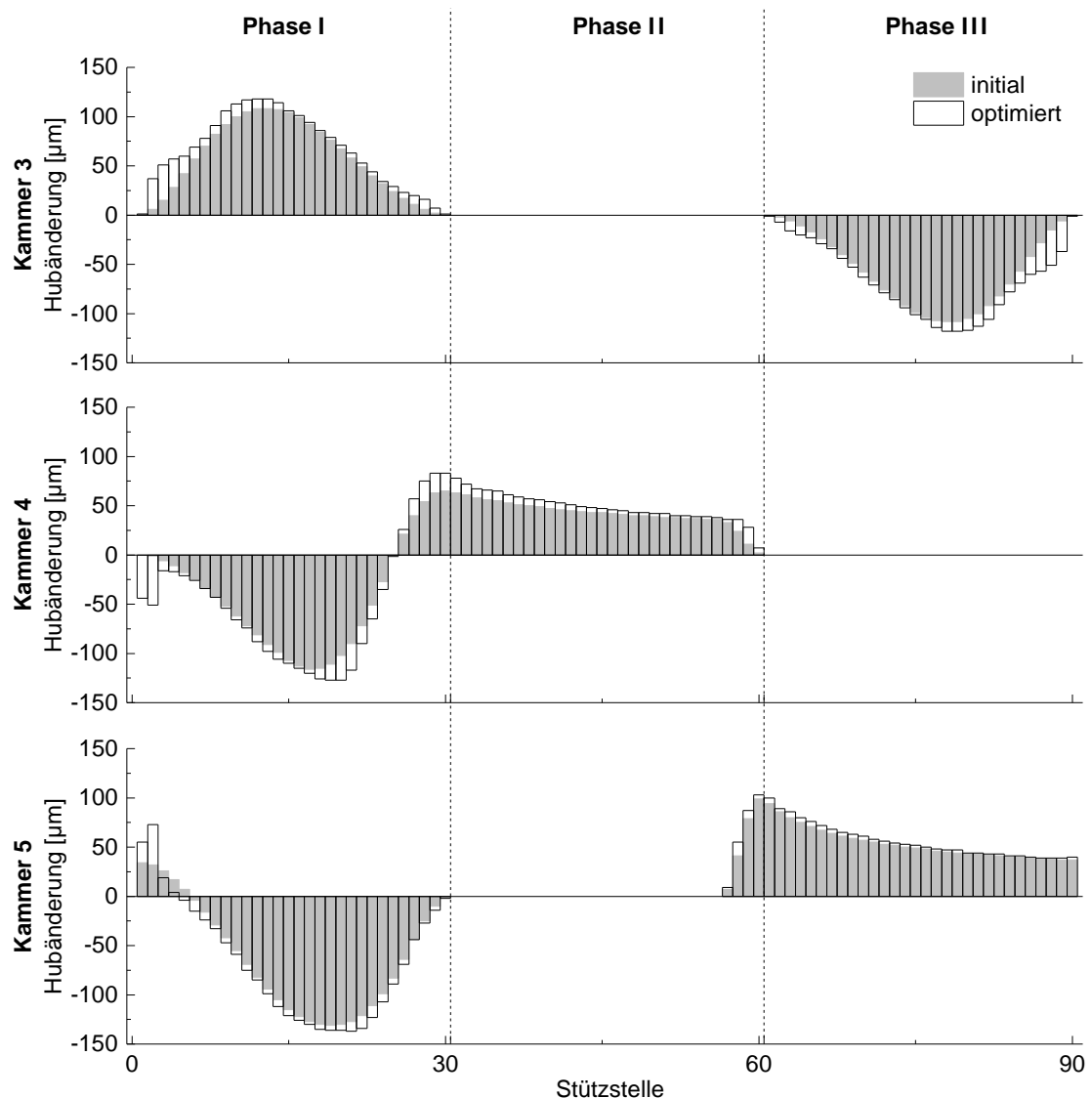


Abbildung 69: Vergleichende Darstellung der berechneten und optimierten Steuerkurven für die Kammern 3 bis 5.

### 6.2.3 Nockenformableitung

#### Aufzeichnung der Antriebspositionen

Die Aufzeichnung der Antriebspositionen erfolgte durch die Software „Steuerkurvenoptimierung“, welche beim „Durchlaufen“ der Steuerkurven an jeder Stützstelle die aktuellen Antriebspositionen (gemäß Motorencoder) der Antriebe aufzeichnete. Bei der für die Optimierung genutzten Arbeitszyklusdauer von 30 s betrug der zeitliche Abstand zwischen den Stützstellen 333 ms. Die Abarbeitung der Befehle für die Motorsteuerung (Motorpositionen auslesen, neue Sollgeschwindigkeiten senden) dauerte  $39 \text{ ms} \pm 12 \text{ ms}$ .



In der Abbildung 70 sind die Abweichungen der von den Antrieben der Kammern 3 bis 5 durchgeführten Bewegungen im Bezug auf die durch die Steuerkurven vorgegeben Bewegungen dargestellt. Eilt die Antriebsposition der vorgegeben Position nach, ist dies durch eine negative Abweichung beschrieben und umgekehrt.

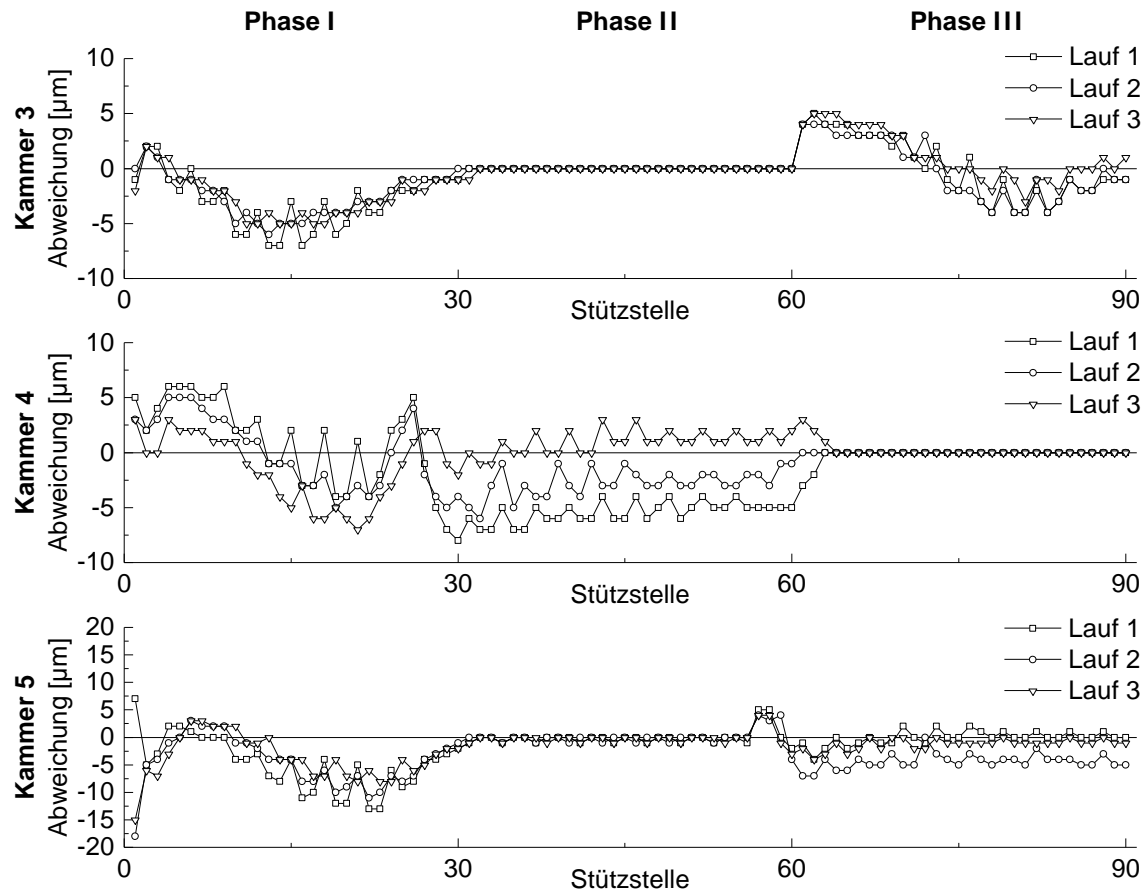


Abbildung 70: Dargestellt ist die Abweichung der aufgezeichneten Antriebspositionen von den Positionen, welche sich theoretisch ergeben, wenn die Steuerkurven von den Antrieben exakt umgesetzt würden.

Die Positionsverläufe der Antriebe und Steuerkurven decken sich in den jeweiligen Rastpositionen der Kammern, was auf einer in der Software „Steuerkurvenoptimierung“ implementierten „Driftkompensation“ beruht, welche dafür sorgte, dass die Antriebe zu Beginn der Rastpositionen in die dafür vorgegebenen Positionen bewegt wurden.

### Messung der Stößelbewegungen

In Abbildung 71 sind die Verläufe der durch die Steuerkurven vorgegebenen Antriebspositionen dargestellt. Dazu sind die Abweichungen der Mediane der gemessenen Stößelpositionen von den vorgegebenen Antriebspositionen aufgetragen. In der Abbildung erfolgt eine um den Faktor 20 vergrößerte Darstellung der Abweichungen, da die Abweichungen im Verhältnis zum Verlauf der vorgegebenen Antriebspositionen andernfalls zu klein für eine erkennbare Darstellung wären.

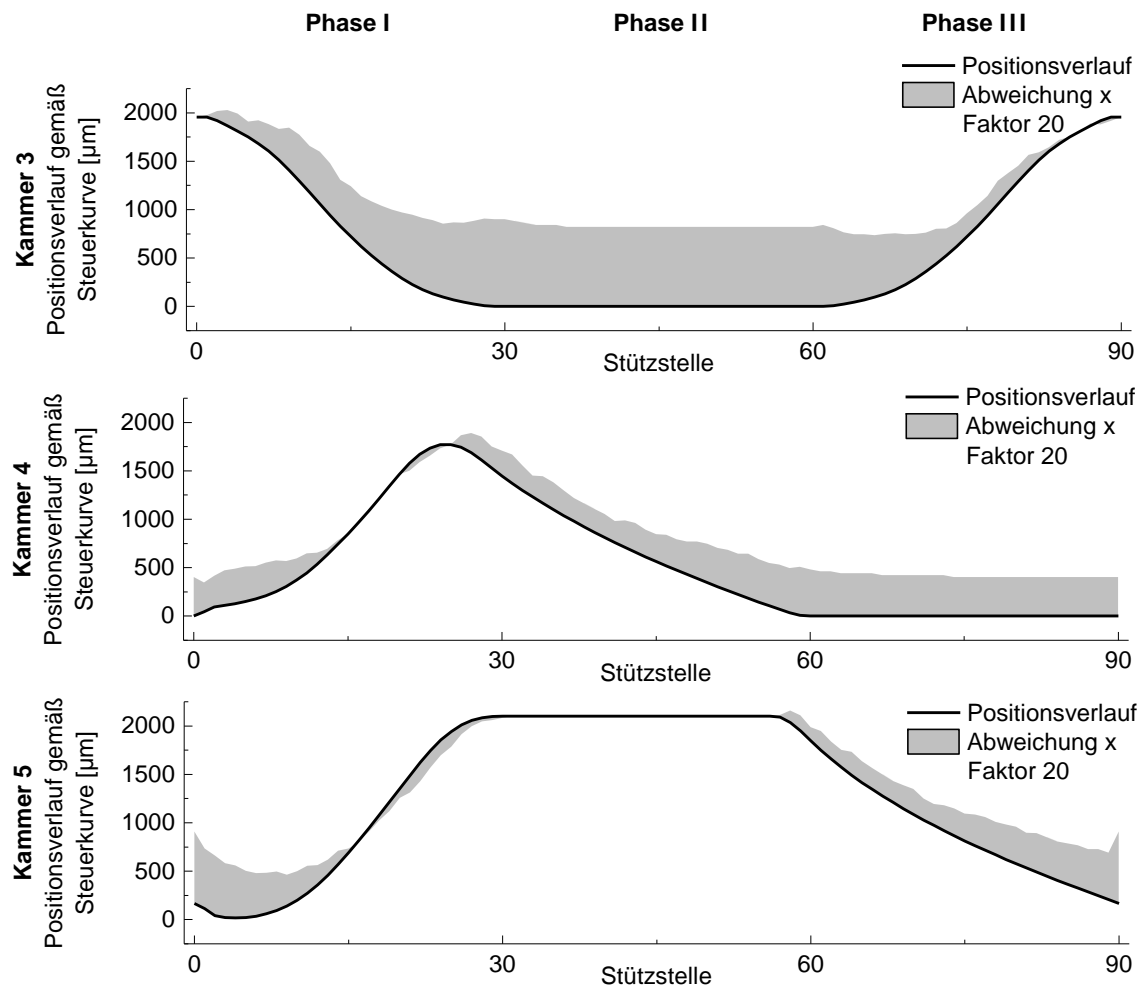


Abbildung 71: Verlauf der aus den Steuerkurven berechneten Stößelbewegungen und Abweichung der gemessenen Stößelbewegungen von den berechneten Stößelbewegungen. Zur besseren Sichtbarkeit ist die Abweichung um den Faktor 20 vergrößert dargestellt.

Der gemeinsame Bezugspunkt zwischen dem Verlauf der Stößelbewegungen und den vorgegebenen Antriebspositionen war die Position mit dem, gemäß der Steuerkurve, größten Abstand zum Verschlusspunkt der jeweiligen Kammer. Die tatsächlichen Stößelbewegungen wichen umso weiter ab, je näher ein Stößel seinem Verschlusspunkt kam, was auf die Elastizität in den Linearantrieben zurückzuführen ist.

Die größte Abweichung von 45  $\mu\text{m}$  trat bei Kammer 3 auf, was darauf beruht, dass der Stößel von Kammer 3 die dreifache Länge der anderen Stößel besaß und damit bei Okklusion auch die dreifache Gegenkraft wirkte.

Für Kammer 4 betrug die maximale Abweichung 25  $\mu\text{m}$ . Diese trat am Ende der Phase II mit Erreichen des Verschlusspunktes auf. Während der Rast im Verschlusspunkt (Phase III) verringerte sich diese Abweichung auf 20  $\mu\text{m}$ , was auf eine für Polymerwerkstoffe typische Retardation (Kriechen) zurückzuführen ist. Ähnliches gilt für Kammer 3, bei welcher sich die Abweichung während der Rast im Verschlusspunkt um 4  $\mu\text{m}$  verringerte.

Für Kammer 5 trat die mit  $37\text{ }\mu\text{m}$  größte Abweichung während des Wechsels von Phase III auf Phase I auf. Verantwortlich dafür war die bereits in Abbildung 70 dargestellte Abweichung zwischen vorgegebener Antriebsposition und vom Linearantrieb angefahrener Position am Beginn der Phase I.

In der Abbildung 72 sind die maximalen Abweichungen der gemessenen Stößelpositionen bezogen auf deren Median dargestellt. Die geringsten Abweichungen zum Median traten bei allen Kammern an den Rastpositionen mit einer Größenordnung von  $1\text{ }\mu\text{m}$  auf. In den Bereichen der Stößelbewegung liegen für die Kammern 3 und 4 die Abweichungen in einem Bereich von  $6\text{ }\mu\text{m}$ . Bei der Kammer 4 kam es dabei einmalig zu einer Abweichung von  $9\text{ }\mu\text{m}$ . Die größten Abweichungen zum Median und damit auch größten Schwankungen der Messwerte traten bei Kammer 5 auf. Die mit  $22\text{ }\mu\text{m}$  größte Abweichung trat hier in der ersten Stützstelle auf.

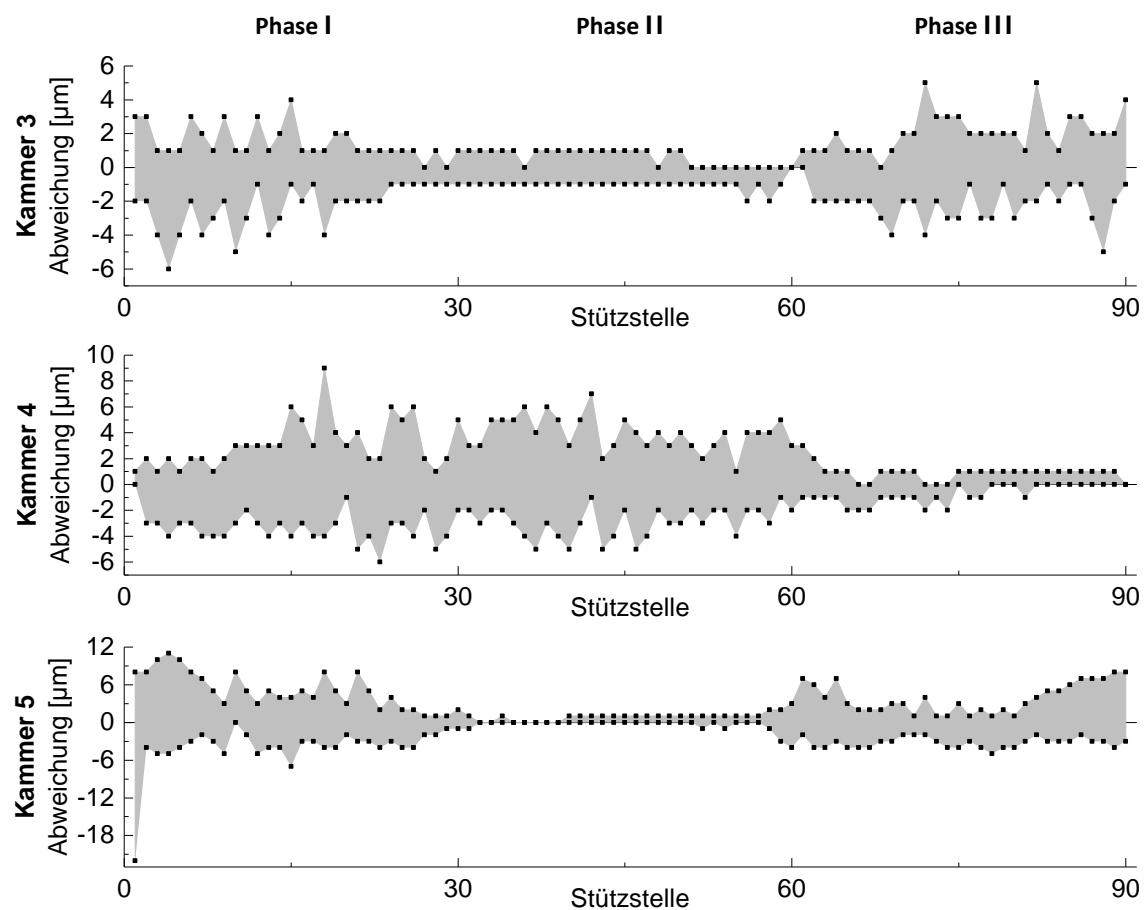


Abbildung 72: Maximale Streuung der gemessenen Stößelpositionen um den Median.

### 6.3 Pumpencharakterisierung

Im Folgenden sind die Ergebnisse der Charakterisierung des mit dem Nockenwellenantrieb ausgestatteten Prototyps dargestellt. Vergleichend dazu wurde der drehzahlabhängige Massenfluss zweier verschiedener Schlauchrollenpumpen gemessen. Diese Pumpen werden im Folgenden entsprechend ihrer Rollenzahl als 5-Rollen-Pumpe beziehungsweise 12-Rollen-Pumpe bezeichnet.

#### 6.3.1 Vergleich des Prototyps mit gängigen Schlauchrollenpumpen

Abbildung 73 zeigt die Massenflussverläufe der getesteten Pumpen bei einer Drehzahl der Antriebswelle von 0,1 Hz. Dargestellt ist der jeweilige Massenfluss während einer Umdrehung der Antriebswelle. Für die Schlauchrollenpumpen ist deutlich die von der Rollenzahl abhängige Frequenz der Massenfluspulsation zu erkennen. Die mit 107 % größte Ungleichmäßigkeit besaß die 5-Rollen-Pumpe. Bei der 12-Rollen-Pumpe betrug die Ungleichmäßigkeit 61 %. Die geringste Ungleichmäßigkeit bei dieser Drehzahl besaß der Prototyp mit 14 %.

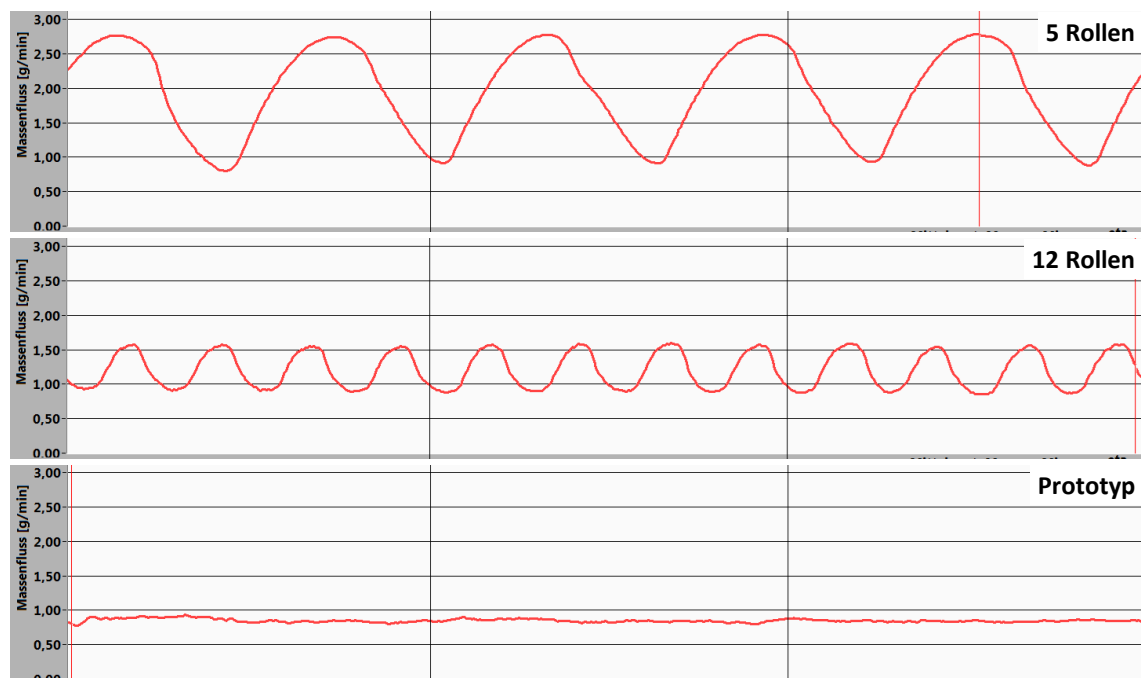


Abbildung 73: Massenflussverlauf einer Rollenpumpe mit 5-Rollen (peRISYS I), einer Rollenpumpe mit 12-Rollen (REGLO Digital MS-2/12) und des Prototyps bei einer Drehzahl von 0,1 Hz.

Der drehzahlabhängige Massenflussverlauf der getesteten Pumpen ist in Abbildung 74 dargestellt. Alle Pumpen wurden bis zu deren maximaler Drehzahl betrieben. Die 5-Rollen-Pumpe besaß einen Drehzahlbereich von 0,02 Hz - 1 Hz und wies in diesem Bereich auch die größte Förderrate auf. Ab einer Drehzahl von 0,25 Hz trat dabei eine zunehmende Abweichung vom idealen Verlauf auf. Die Drehzahl der 12-Rollen-Pumpe reichte von 0,03 Hz - 2,6 Hz. Der drehzahlabhängige Massenfluss dieser Pumpe folgte dabei dem idealen linearen Verlauf,

welcher aus dem Förderratenanstieg im Bereich von 0,03 Hz - 0,1 Hz berechnet wurde. Der Prototyp der linearen Pumpe wurde in einem Drehzahlbereich zwischen 0,01 und 3 Hz getestet. Im Vergleich mit den Schlauchrollenpumpen wies der drehzahlabhängige Massenflussverlauf den geringsten Anstieg auf. Ab 0,5 Hz war eine zunehmende Abweichung vom idealen linearen Verlauf festzustellen.

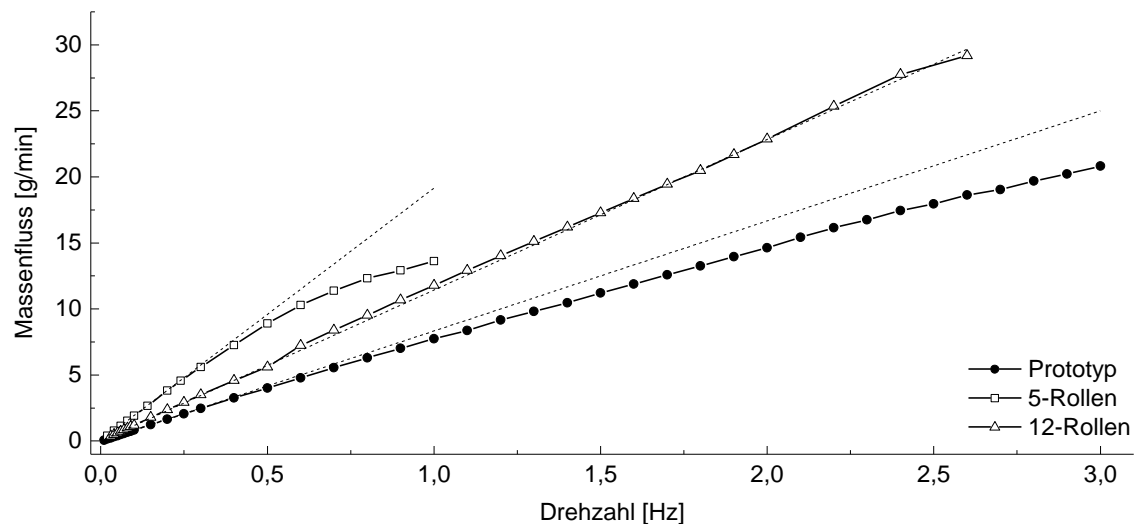


Abbildung 74: Drehzahlabhängiger Massenflussverlauf des Prototyps sowie der beiden Schlauchrollenpumpen. Jede der Pumpen wurde bis zu deren maximaler Drehzahl getestet. Die gestrichelten Linien zeigen den jeweiligen ideal linearen Verlauf, welcher aus dem Anstieg der Messwerte bei kleiner Drehzahl (bis 0,1 Hz) berechnet wurde.

In der Abbildung 75 ist der drehzahlabhängige Verlauf der Pulsation in Form der Ungleichmäßigkeit des Massenflusses dargestellt. Auffällig dabei ist, dass bei allen Pumpen die größte Ungleichmäßigkeit bei kleinen Drehzahlen auftrat und mit zunehmender Drehzahl abnahm, bis ein drehzahlunabhängiges Minimum erreicht wurde.

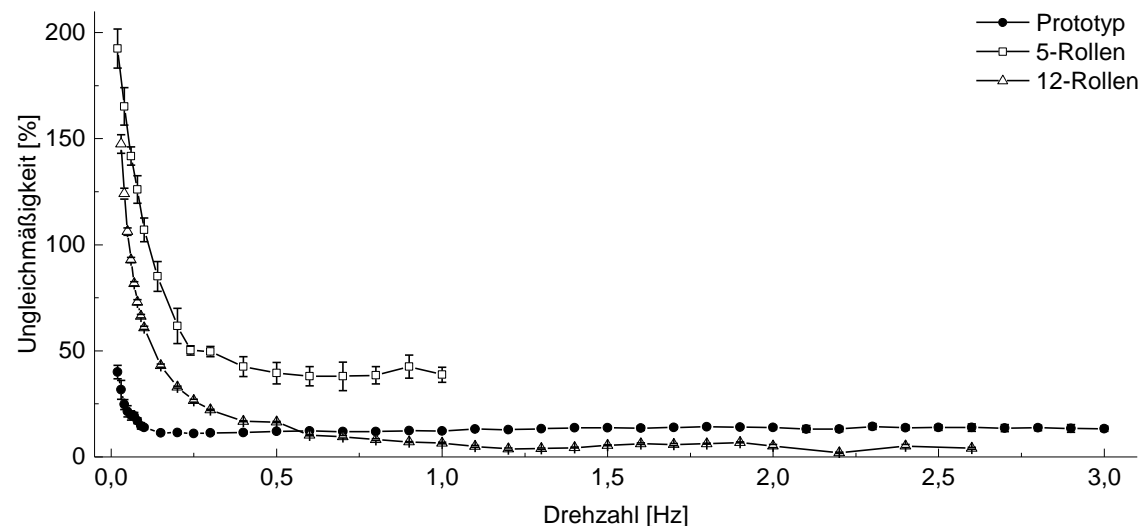


Abbildung 75: Drehzahlabhängige Ungleichmäßigkeit des Massenflusses des Prototyps sowie der beiden Schlauchrollenpumpen.

Die größte Ungleichmäßigkeit und damit Pulsation wies der von der 5-Rollen-Pumpe erzeugte Massenfluss auf. Beginnend mit 192 % bei 0,02 Hz nahm die Ungleichmäßigkeit ab, bis ab einer Drehzahl von 0,5 Hz ein Minimum von etwa 40 % erreicht war.

Im Vergleich zur 5-Rollen-Pumpe war die Ungleichmäßigkeit des mit der 12-Rollen-Pumpe erzeugten Massenflusses grundsätzlich geringer. Bei einer Drehzahl von 0,03 Hz betrug sie 147 % und erreichte ab 1 Hz ihr Minimum in der Größenordnung von 5 %.

Die Ungleichmäßigkeit des mit dem Prototyp erzeugten Massenflusses war für Drehzahlen kleiner 0,6 Hz geringer als bei den Rollenpumpen. Beginnend mit 40 % bei 0,02 Hz nahm die Ungleichmäßigkeit, im Vergleich zu den Rollenpumpen, schneller ab und erreichte ab 0,09 Hz ihr drehzahlunabhängiges Minimum in der Größenordnung von 13 %.

### 6.3.2 Gegendruckabhängigkeit

Die Messung des gegendruckabhängigen Massenflusses erfolgte für den Prototyp bei den Drehzahlen 0,5 Hz, 1 Hz und 2 Hz. In der Abbildung 76 sind die entsprechenden Massenflussverläufe dargestellt. Die Verläufe beginnen nicht bei 0 bar, da durch den fluidischen Widerstand des Massenflusssensors auch bei vollständig geöffnetem Drosselventil ein flussratenabhängiger Gegendruck am Pumpenausgang erzeugt wurde.

Alle in Abbildung 76 dargestellten Massenflussverläufe nahmen mit zunehmendem Gegendruck ab. Je größer der Gegendruck war, umso steiler war auch die Abnahme des Massenflusses. Der maximale Gegendruck wurde bei geschlossenem Drosselventil erzeugt.

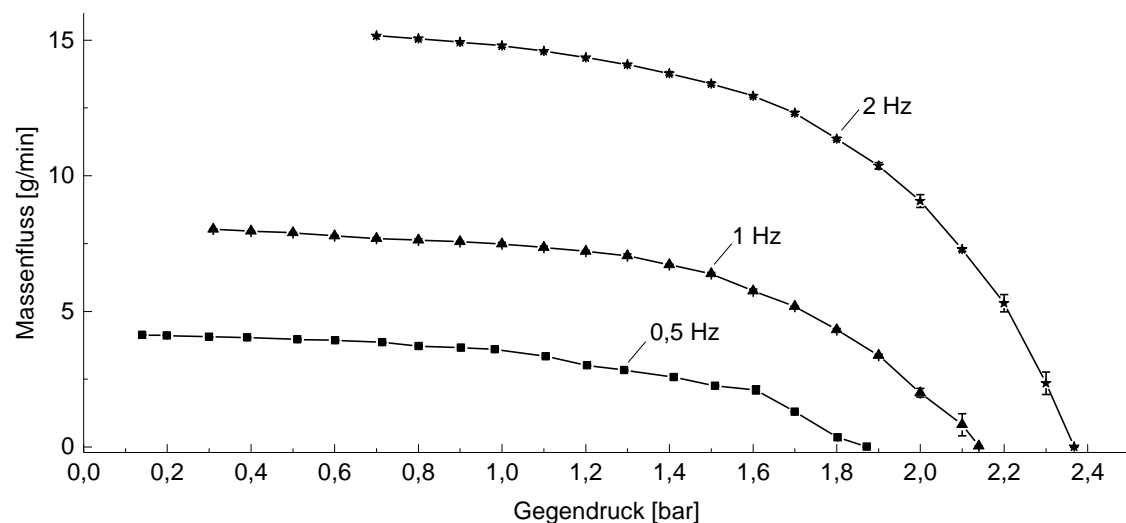


Abbildung 76: Gegendruckabhängigkeit des Prototyps, gemessen bei drei verschiedenen Drehzahlen mit  $n = 10$ . Aufgrund des fluidischen Widerstandes des an den Pumpenausgang angeschlossenen Massenflusssensors stellt sich auch bei vollständig geöffnetem Drosselventil ein massenflussabhängiger Gegendruck (Startwert) ein.

In der Abbildung 77 sind die Verläufe der Ungleichmäßigkeit des gegendruckabhängigen Massenflusses dargestellt. Mit zunehmendem Gegendruck nahm die Ungleichmäßigkeit des Massenflusses zu. Bei einer niedrigen Drehzahl war diese Zunahme zunächst größer als bei einer hohen Drehzahl.

Die Ungleichmäßigkeit des Massenflusses bei maximalem Gegendruck ist nicht in der Abbildung enthalten, da bei geschlossenem Drosselventil der Massenfluss Null und dadurch die Ungleichmäßigkeit unendlich groß ist.

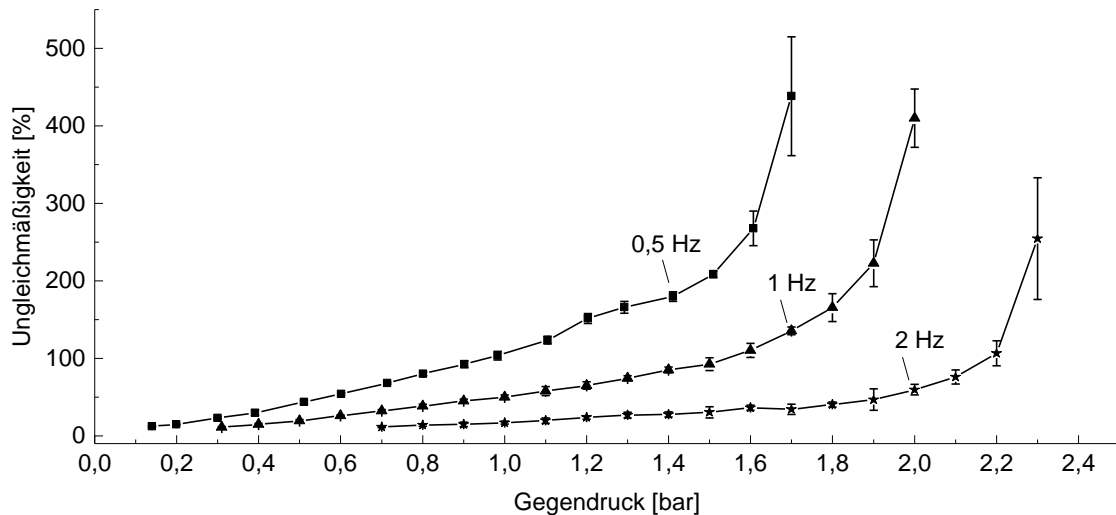


Abbildung 77: Gegendruckabhängige Ungleichmäßigkeit des vom Prototyp erzeugten Massenflusses, gemessen für drei verschiedene Drehzahlen mit  $n = 10$ .

### 6.3.3 Gegenläufige Förderrichtung

Da die lineare Pumpe gemäß des Phasenplans in der Lage sein soll, in beide Richtungen pulsationsfrei zu fördern, wurde der Prototyp auch in die Gegenrichtung getestet in dem Pumpenein- und ausgang vertauscht und die Drehrichtung der Nockenwelle invertiert wurde. Abbildung 78 zeigt die drehzahlabhängigen Massenflüsse für beide Förderrichtungen. Mit Richtung 1 ist dabei die Förderrichtung bezeichnet, mit welcher auch die Optimierung der Steuerkurven erfolgte. Dementsprechend ist mit Richtung 2 die Förderung in die Gegenrichtung bezeichnet. Von geringfügigen Abweichungen abgesehen, sind die beiden Massenflussraten nahezu deckungsgleich.

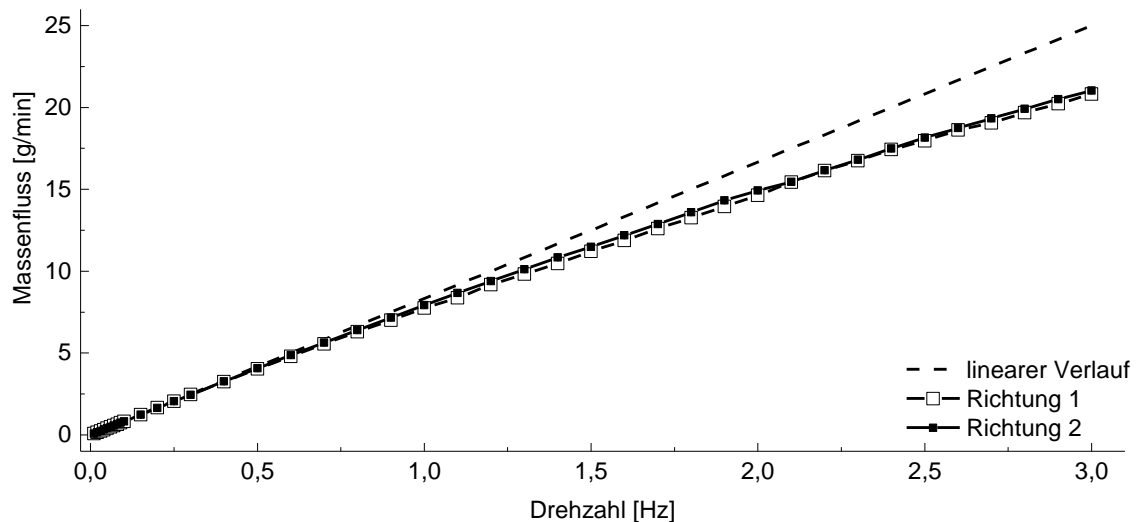


Abbildung 78: Drehzahlabhängige Massenflussraten für beide Förderrichtungen des Prototyps. Zum Vergleich ist der ideal lineare Verlauf eingezeichnet.

### 6.3.4 Massenflussverlauf

In Abbildung 79 ist der Massenflussverlauf bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz dargestellt. Diese Drehzahl ist vergleichbar der für die Steuerkurvenoptimierung genutzten Zyklusdauer von 30 s.

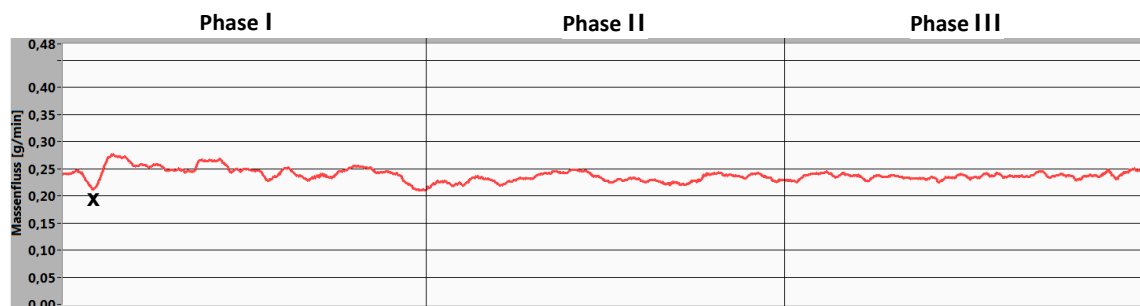


Abbildung 79: Massenflussverlauf eines vollständigen Arbeitszyklus bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz. Für die bessere Sichtbarkeit des Übergangs von Phase III auf Phase I ist der Massenfluss um ca. 4° phasenversetzt (nach rechts) dargestellt und der Startpunkt von Phase I mit „x“ markiert.

Bei 0,03 Hz betrug der mittlere Massenfluss 0,24 g/min und lag damit in der Größenordnung des mit den Linearantrieben erzeugten Massenflusses von 0,28 g/min. Die Ungleichmäßigkeit betrug 32 % und war damit um den Faktor 3 größer als bei der Konfiguration mit den Linearantrieben.

Zu Beginn der Phase I wies der in Abbildung 79 dargestellte Massenfluss einen auffälligen Verlauf auf. An dieser Stelle wurde der pumpenausgangsseitige Massenfluss ausschließlich durch die Kammer 5 erzeugt. Die in Abbildung 80 dargestellten Ausschnitte des Massenflussverlaufes und des Führungskurvenradius der Kurvenscheibe von Kammer 5 zeigen einen auffälligen Zusammenhang. In dem Bereich, in welchem der Anstieg des Führungskurvenradius abnahm, nahm auch der Massenfluss ab. Bereits während der nächsten Stützstelle des



Führungskurvenradius stieg der Massenfluss über seinen Mittelwert. Das heißt, die Fluidmasse, welche durch eine zu geringe Stößelbewegung zunächst fehlte, wurde anschließend in Folge der zu großen Stößelbewegung zu viel gefördert.

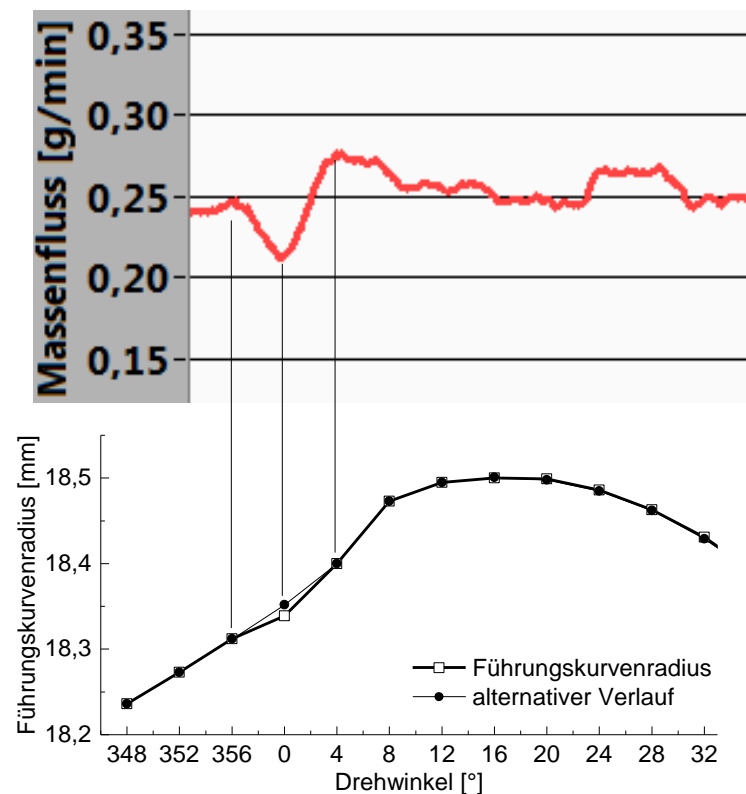


Abbildung 80: Ausschnitt des Massenflussverlaufs von Abbildung 79 mit Zuordnung der Stützstellen des drehwinkelabhängigen Kurvenscheibenradius. Vergleicht man die Anstiege im Kurvenscheibenradius mit den Anstiegen im Massenflussverlauf wird der Zusammenhang erkennbar.

Der in Abbildung 80 dargestellte „alternative Verlauf“ des Führungskurvenradius wurde aus der Differenz zwischen den Antriebspositionen von Lauf 3 und dem in Abbildung 81 dargestellten Mittelwert einer nachträglich durchgeführten zehnfachen Messung der Antriebspositionen berechnet. An der Stelle  $0^\circ$  beträgt die Differenz zwischen dem Führungskurvenradius und dem „alternativem Verlauf“  $13\text{ }\mu\text{m}$ .

Wie der Abbildung 81 zu entnehmen, weichen die Antriebspositionen der Läufe 1 bis 3 an der ersten Stützstelle, welche mit der Stelle  $0^\circ$  der Kurvenscheibe korrespondiert, deutlich von dem Mittelwert der Zehnfachmessung ab. Auf die Ursachen wird später noch in Kapitel 7.2.3 eingegangen.

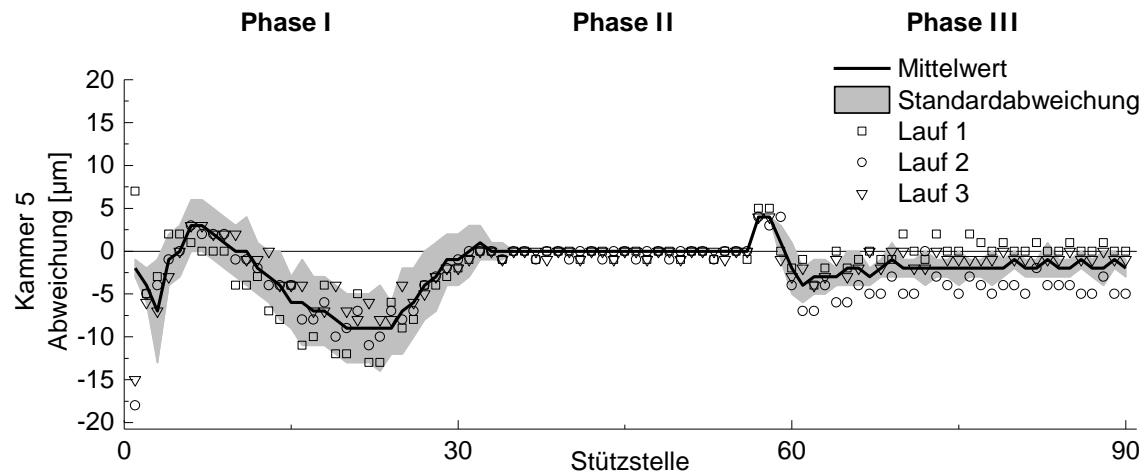


Abbildung 81: Mittelwert und Standardabweichung des Antriebspositionsverlaufs der Kammer 5 von einer nachträglich durchgeführten zehnfachen Wiederholungsmessung. Vergleichend dazu sind die Antriebspositionsverläufe aus Abbildung 70 dargestellt (Lauf 1 bis 3), welche für die Messung der tatsächlichen Stößelbewegung verwendet wurden.

### 6.3.5 Einfluss der Nockenwellendrehzahl auf den Massenfluss

In der Abbildung 82 sind die Massenflussverläufe bei unterschiedlichen Nockenwellendrehzahlen dargestellt. Für Drehzahlen bis etwa 0,05 Hz wurde die größte Ungleichmäßigkeit im Massenfluss durch den Fehler in der Kurvenscheibe der Kammer 5 erzeugt. Bereits ab einer Drehzahl von 0,10 Hz ist zu erkennen, dass andere Einflüsse dem durch den Fehler in der Kurvenscheibe verursachten Effekt überwogen. Ab einer Drehzahl von 0,20 Hz ist ein deutliches Absinken des Massenflussverlaufes kurz nach Beginn der Phase I zu erkennen.

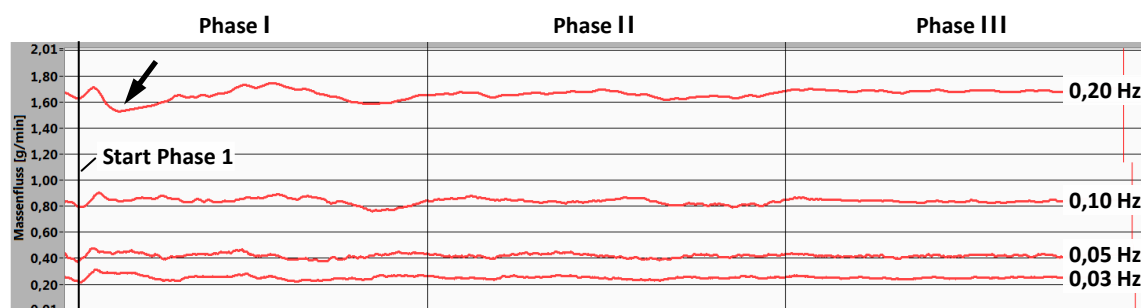


Abbildung 82: Massenflussverlauf für unterschiedliche Nockenwellendrehzahlen. Bei 0,2 Hz wurde Kammer 3 nicht mehr vollständig gefüllt, was zu einem Absinken (siehe Pfeil) des Massenflusses kurz nach Beginn von Phase I führte.

Abbildung 83 zeigt den Massenflussverlauf bei einer Drehzahl von 0,5 Hz. Hier ist der durch den Fehler in der Kurvenscheibe verursachte Effekt nicht mehr zu erkennen. Stattdessen verursachte nun ein Absinken des Massenflusses kurz nach dem Beginn der Phase I eine Ungleichmäßigkeit. Dieses Absinken des Massenflusses erfolgte dadurch, dass Kammer 3 während der Phase III nicht mehr vollständig gefüllt wurde und dadurch zu Beginn der Phase I nicht genug Fluidmasse abgeben konnte.

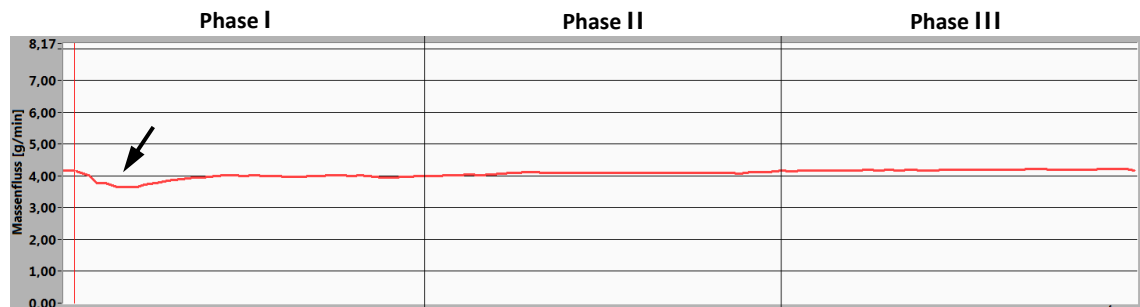


Abbildung 83: Massenflussverlauf bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,5 Hz. Die größte Ungleichmäßigkeit wurde durch ein Absinken des Massenflusses kurz nach dem Beginn der Phase I (siehe Pfeil) verursacht. Der durch die „fehlerhafte“ Kurvenscheibe der Kammer 5 verursachte Effekt ist nicht mehr zu erkennen.

### 6.3.6 Wiederholgenauigkeit

#### Positioniergenauigkeit der Schlauchaufnahme

Die Wiederholgenauigkeit der Positionierung in der Schlauchaufnahme wurde getestet, indem der für die Steuerkurvenoptimierung und bisherige Pumpencharakterisierung verwendete Schlauch aus der Pumpe entnommen und erneut in die Pumpe eingesetzt und anschließend der Massenflussverlauf bei 0,03 Hz gemessen wurde.

In der Abbildung 84 sind die drei Massenflussverläufe aus der Untersuchung der Positioniergenauigkeit sowie im Vergleich dazu der während der Pumpencharakterisierung gemessene Verlauf dargestellt.

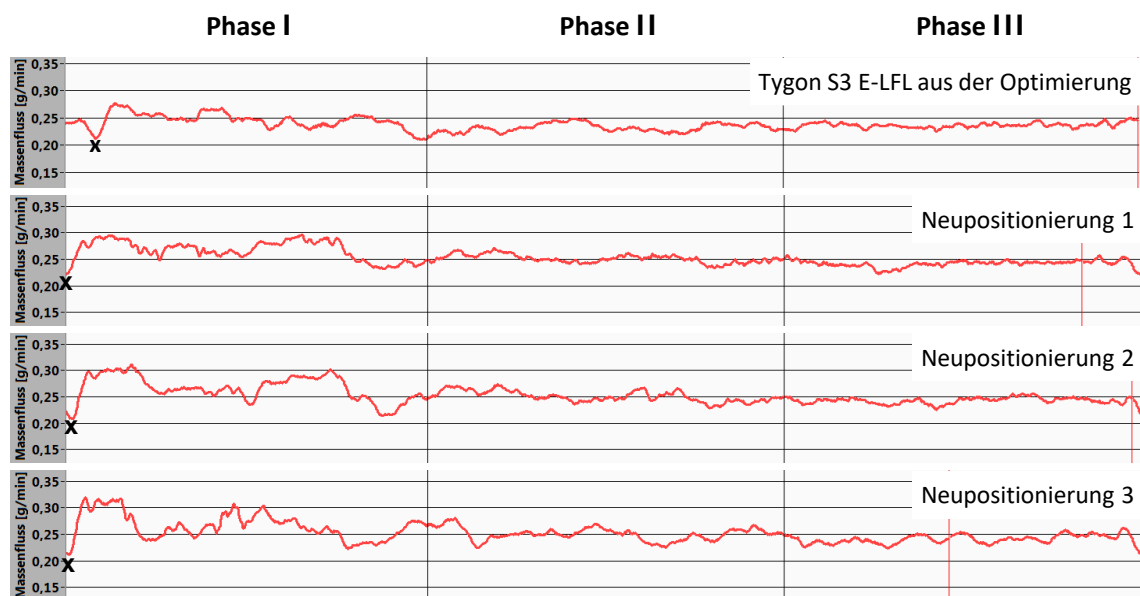


Abbildung 84: Bei einer Drehzahl von 0,03 Hz erzeugte Massenflussverläufe mit dem für die Optimierung verwendeten Schlauch. Der oberste Massenflussverlauf wurde aufgezeichnet ohne dass der Schlauch nach der Steuerkurvenoptimierung aus der Pumpe entnommen wurde. Bei den übrigen Massenflussverläufen wurde der Schlauch jeweils aus der Pumpe entnommen und wieder eingesetzt. Der Startpunkt von Phase I mit „x“ markiert.

Zwischen der Steuerkurvenoptimierung und der Pumpencharakterisierung wurde der Schlauch zunächst nicht aus der Pumpe entnommen. Bei der Pumpencharakterisierung wurden für eine Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz ein mittlerer Massenfluss von  $0,24 \text{ g/min} \pm 0 \text{ g/min}$  mit einer Ungleichmäßigkeit von  $32 \% \pm 5 \%$  gemessen. Der dabei typische Massenflussverlauf ist in Abbildung 84 oben dargestellt. Nach der Schlauchentnahme und dem erneuten Einsetzen in die Pumpe wurde jeweils ein mittlerer Massenfluss von  $0,25 \text{ g/min}$  gemessen. Die Ungleichmäßigkeit reichte dabei von 32 % bis 44 %. Insbesondere während der Phase I wurde der Massenflussverlauf nach Entnahme des Schlauches nicht wieder exakt reproduziert. Auf die möglichen Ursachen und daraus abzuleitenden Konsequenzen wird noch in Kapitel 7.2.8 eingegangen.

#### Reproduzierbarkeit des Massenflussverlaufes bei gleichem Schlauchtyp

Abbildung 85 zeigt die mit verschiedenen Schläuchen desselben Typs gemessenen Massenflussverläufe bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz. Der mit diesen Schläuchen erzeugte mittlere Massenfluss von  $0,25 \text{ g/min}$  (Schlauch 1 und 3) beziehungsweise  $0,26 \text{ g/min}$  (Schlauch 2) war vergleichbar zu dem Massenfluss von  $0,24 \text{ g/min}$ , des für die Optimierung verwendeten Schlauches. Die Betrachtung der Massenflussverläufe zeigte, dass bei allen Schläuchen der während der Phase II und III erzeugte Massenfluss ähnlich pulsationsarm war. Auch der Übergang von Phase II zu Phase III erfolgte bei allen Schläuchen pulsationsarm. Im Gegensatz dazu unterschieden sich die während der Phase I erzeugten Massenflüsse sowohl hinsichtlich ihrer Ungleichmäßigkeit als auch hinsichtlich ihres Verlaufes.

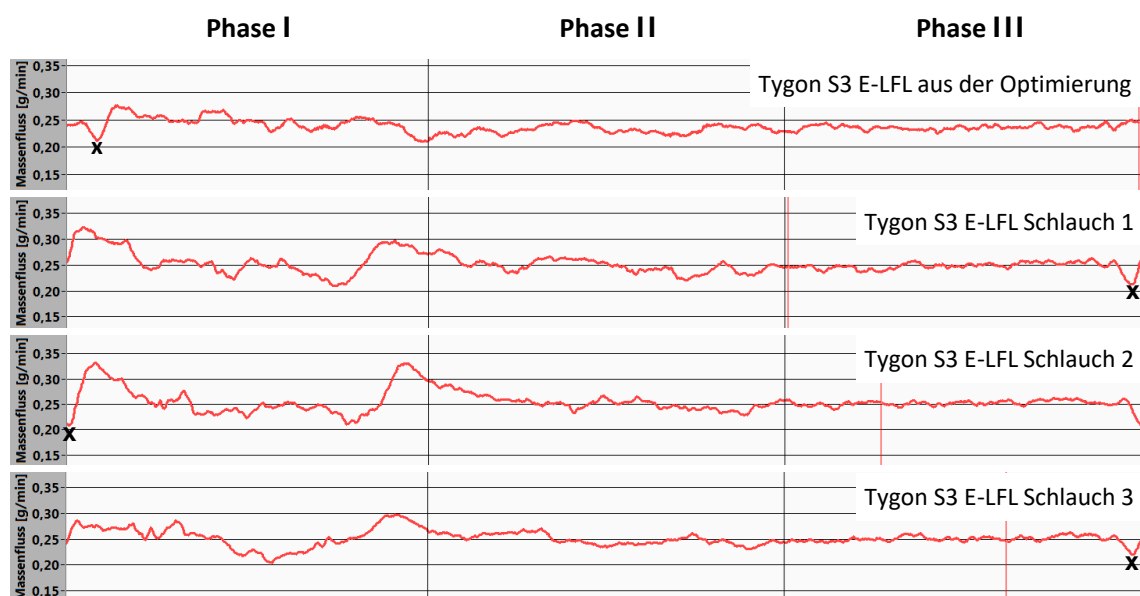


Abbildung 85: Massenflussverläufe für verschiedene Tygon S3 E-LFL Schläuche bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz. Zur Orientierung ist der Startpunkt von Phase I mit „x“ markiert.

Abbildung 86 zeigt den drehzahlabhängigen Massenfluss für die verschiedenen Tygon S3 E-LFL Schläuche, im Vergleich mit dem Massenfluss des für die Optimierung genutzten Schlauches. Der Verlauf des drehzahlabhängigen Massenflusses war für alle Schläuche ähnlich, jedoch nicht identisch.

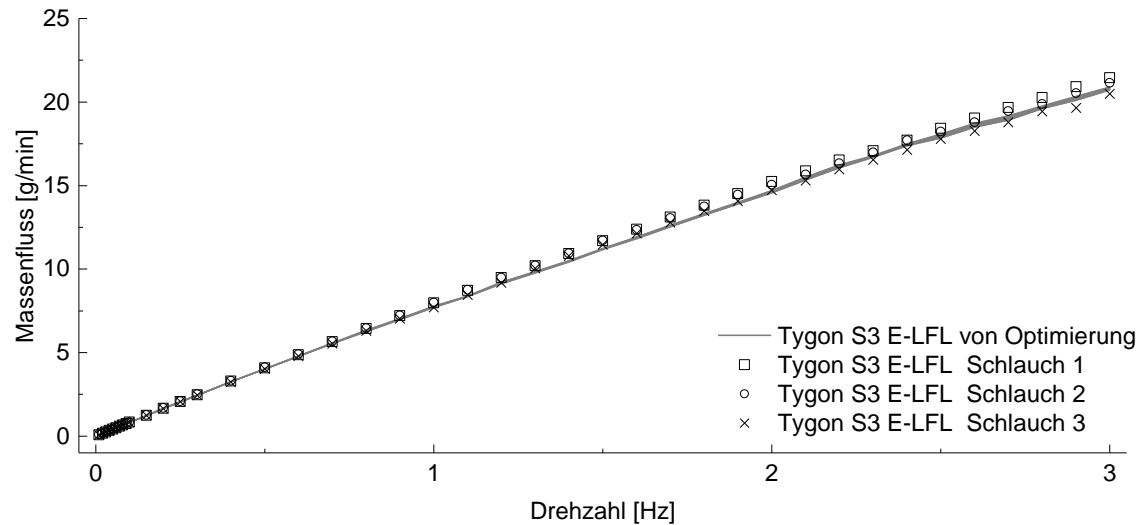


Abbildung 86: Drehzahlabhängiger Massenfluss der vier getesteten Schläuche des Typs Tygon S3 E-LFL. Die variable Breite der grauen Linie beschreibt die Standardabweichung im Massenfluss des für die Steuerkurvenoptimierung verwendeten Schlauches.

Die Ungleichmäßigkeit des Massenflusses in Abhängigkeit der Nockenwellendrehzahl ist in Abbildung 87 dargestellt. Auch der Verlauf der Ungleichmäßigkeit war für alle Schläuche ähnlich. Bei geringen Drehzahlen bis 0,5 Hz war die mit den neuen Schläuchen gemessene Ungleichmäßigkeit größer als bei dem für die Optimierung genutzten Schlauch. Ab etwa 1 Hz wies der mit dem Schlauch 3 erzeugte Massenfluss eine überwiegend geringere Ungleichmäßigkeit auf, verglichen mit dem für die Optimierung genutzten Schlauch. Die Ungleichmäßigkeit der mit den Schläuchen 1 und 2 erzeugten Massenflüsse entsprach ab 1 Hz dagegen annähernd dem mit dem für die Optimierung genutzten Schlauch gemessenen Verlauf.

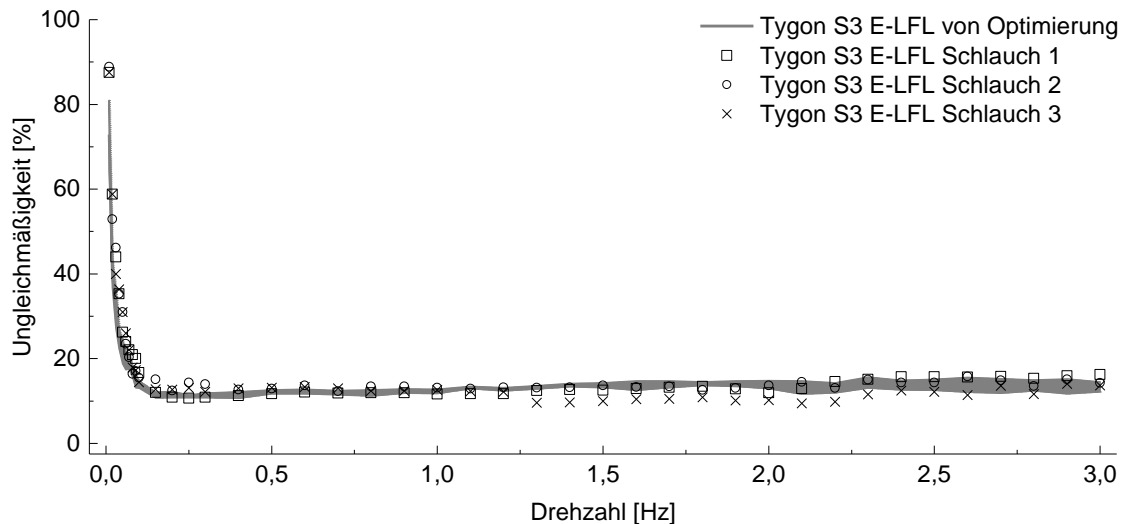


Abbildung 87: Drehzahlabhängige Ungleichmäßigkeit im Massenfluss der vier getesteten Schläuche des Typs Tygon S3 E-LFL. Die variable Breite der grauen Linie beschreibt die Standardabweichung der Ungleichmäßigkeit im Massenfluss des für die Steuerkurvenoptimierung verwendeten Schlauches.

### Übertragbarkeit der Steuerkurven auf einen anderen Schlauchtyp

Die Übertragbarkeit der optimierten Steuerkurven auf Schläuche mit der gleichen Geometrie (Innendurchmesser, Wandstärke) jedoch aus anderem Material wurde mit drei Schläuchen von Typ Tygon 2001 getestet. Abbildung 88 zeigt die bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz gemessenen Massenflussverläufe. Mit allen drei getesteten Schläuchen wurde bei dieser Drehzahl ein mittlerer Massenfluss von 0,25 g/min erzeugt. Während der Phasen II und III wurde auch mit den Tygon 2001 Schläuchen ein annähernd pulsationsfreier und konstanter Massenfluss erzeugt. Davon abweichend sank bei Schlauch 3 der Massenfluss im Übergang von Phase II auf Phase III kurzzeitig ab. Ein solcher Verlauf resultierte daraus, dass der Verschluss der Kammer 4 zu früh eintrat, vermutlich in Folge einer fertigungsbedingten Abweichung der Schlauchwandstärke.

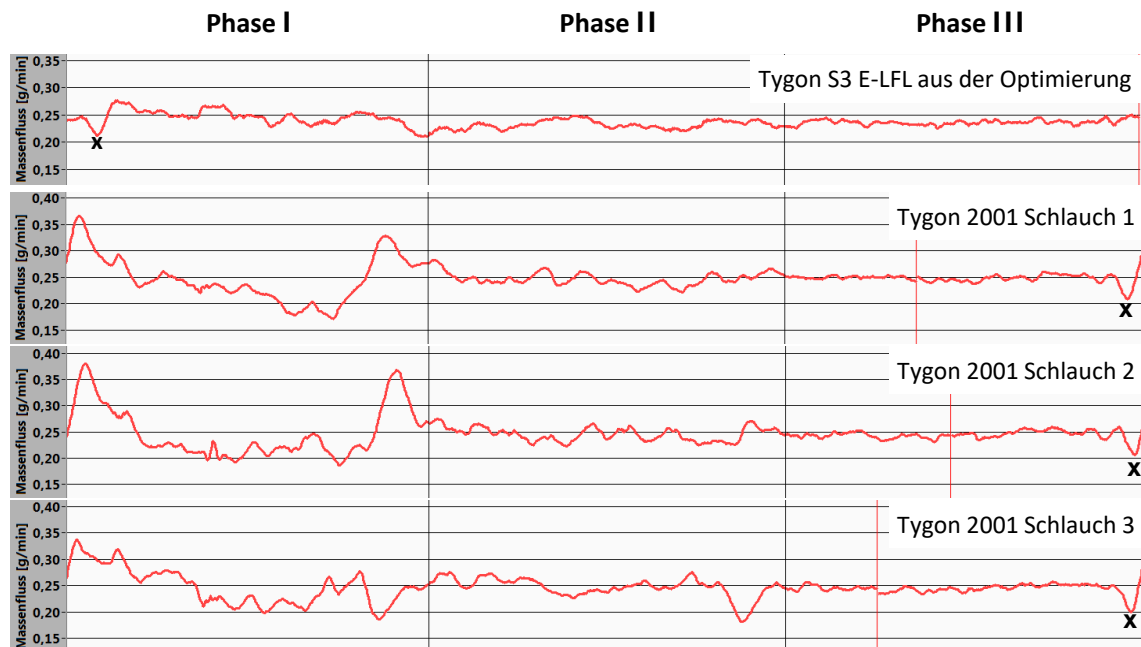


Abbildung 88: Massenflussverläufe der getesteten Tygon 2001 Schläuche bei einer Nockenwellendrehzahl von 0,03 Hz. Zum Vergleich ist oben der Massenflussverlauf für den Schlauch dargestellt, auf welchen die Steuerkurven optimiert wurden. Die Massenflussverläufe sind leicht phasenversetzt dargestellt. Zur Orientierung ist der Startpunkt von Phase I mit einem x markiert.

In Phase I war die Ungleichmäßigkeit des Massenflusses der Tygon 2001 Schläuche mit 63 bis 79 % annähernd doppelt so groß, wie die des für die Optimierung genutzten Schlauches mit 42 %. Bei den Schläuchen 1 und 2 schwang der Massenfluss im Übergang von den Phase III auf Phase I sowie Phase I auf Phase II über. Bei Schlauch 3 schwang der Massenfluss lediglich im Übergang von Phase III auf Phase I über. Im Übergang von Phase I auf Phase II sank dagegen der Massenfluss genau wie beim Übergang von Phase II auf Phase III kurzzeitig ab.

Die mit den drei Tygon 2001 Schläuchen erzeugten drehzahlabhängigen Massenflussraten sind in Abbildung 89 dargestellt. Bis zu einer Drehzahl von 0,5 Hz waren die Massenflussraten deckungsgleich zur Massenflussrate des Tygon S3 E-LFL Schlauches. Ab 0,5 Hz lagen die Massenflussraten der drei Tygon 2001 Schläuche über der des für die Optimierung genutzten Schlauches. Der Anstieg der Massenflussraten der Tygon 2001 Schläuche war damit steiler als der der Tygon S3 E-LFL Schläuche, jedoch blieben auch die Massenflussraten der Tygon 2001 Schläuche ab einer Drehzahl von 0,5 Hz hinter dem idealen linearen Verlauf der Massenflussrate zurück.

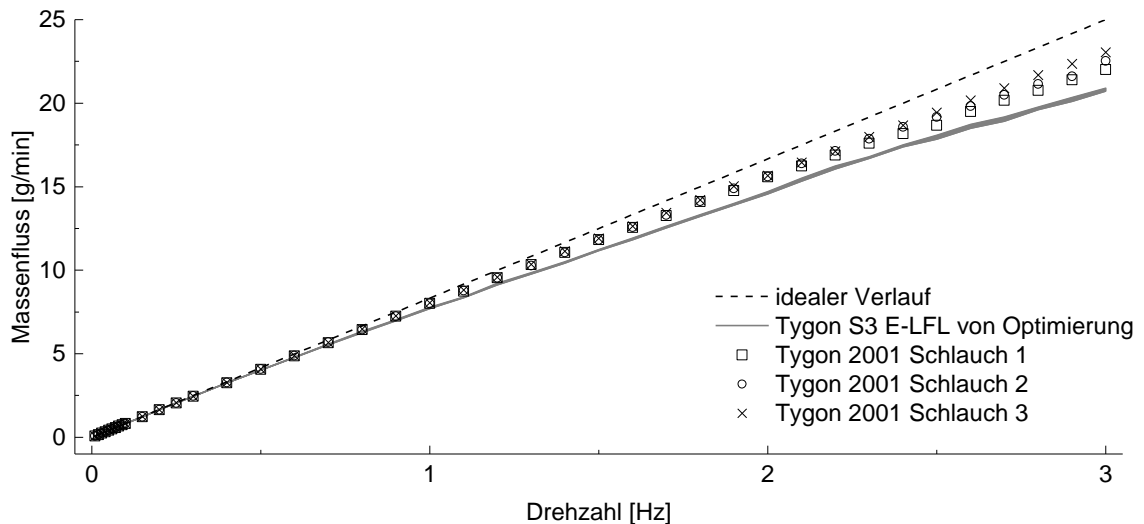


Abbildung 89: Drehzahlabhängiger Massenfluss der drei getesteten Tygon 2001 Schläuche. Vergleichend dazu sind der ideale lineare Verlauf als gestrichelte Linie sowie der drehzahlabhängige Massenfluss des für die Steuerkurvenoptimierung genutzten Tygon S3 E-LFL Schlauches als graue Linie dargestellt. Die variable Breite der grauen Linie beschreibt die Standardabweichung.

Die Abbildung 90 zeigt die Ungleichmäßigkeit der Massenflüsse in Abhängigkeit von der Drehzahl. Für Drehzahlen kleiner als 0,5 Hz war die Ungleichmäßigkeit der mit den Tygon 2001 Schläuchen erzeugten Massenflüsse größer als die Ungleichmäßigkeit des Massenflusses des für die Optimierung genutzten Schlauches. Ab 0,5 Hz war dagegen die Ungleichmäßigkeit bei den Tygon 2001 Schläuchen mit im Mittel 9 % geringer als die Ungleichmäßigkeit des Massenflusses des für die Optimierung genutzten Schlauches mit im Mittel 14 %.

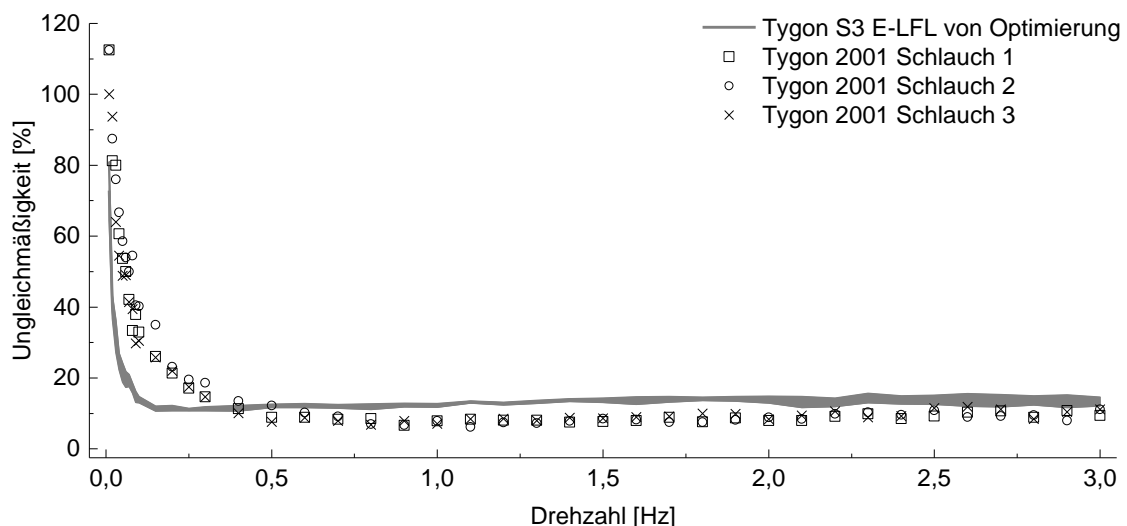


Abbildung 90: Drehzahlabhängige Ungleichmäßigkeit im Massenfluss der drei getesteten Tygon 2001 Schläuche. Vergleichend dazu ist die drehzahlabhängige Ungleichmäßigkeit im Massenfluss des für die Steuerkurvenoptimierung genutzten Tygon S3 E-LFL Schlauches als graue Linie dargestellt. Die variable Breite der grauen Linie beschreibt die Standardabweichung.



## 7 Diskussion

Von Feller & Schimmelpfennig (2010) wurde erstmals ein theoretischer Ansatz vorgestellt, welcher die zeitliche Volumenänderung von fünf in Reihe geschalteten Arbeitsräumen (Pumpkammern) beschreibt, in deren Konsequenz ein kontinuierlicher, zeitlich konstanter Volumenstrom am Pumpeneingang und am Pumpenausgang erzeugt werden soll. Wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, erfordern die von Feller & Schimmelpfennig beschriebenen zeitlichen Volumenänderungen sprunghafte Änderungen der von den Arbeitsräumen erzeugten Teilvolumenströme (siehe Kapitel 3). Folglich wären für die Umsetzung dieses Konzeptes unendlich große Beschleunigungen der die Arbeitsräume bildenden mechanischen Komponenten und des in den Arbeitsräumen enthaltenen Fluides nötig. Damit ist die von Feller & Schimmelpfennig (2010) beschriebene „Steuerung“ der Arbeitsraumvolumina technisch nicht realisierbar. Die in dem Konzept enthaltene Idee von fünf sequenziell angeordneten Arbeitsräumen stellt hingegen eine geeignete Basis für die Entwicklung pulsationsfreier linearer Schlauchpumpen dar. Darauf aufbauend und unter dem Aspekt einer tatsächlich technisch realisierbaren Pumpe wurde in dieser Arbeit ein parametrisches Pumpenmodell entwickelt. Dieses Modell beschreibt die, für eine kontinuierliche pulsationsfreie Arbeitsweise erforderlichen, pumpenintern zu erzeugenden Teilvolumenströme anhand von stetigen und durchgängig differenzierbaren Übertragungsfunktionen. Ausgehend von diesen Übertragungsfunktionen erfolgt die Berechnung der erforderlichen zeitlichen Änderungen der in den Arbeitsräumen enthaltenen Fluidvolumina. Die erforderliche „Beschleunigung“  $\ddot{V}_i(t)$  der Teilvolumina ist dabei anhand von zwei Parametern ( $s_2, s_3$ ) auf einen endlichen Wert einstellbar. Für die Beschreibung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Arbeitsraumvolumen und Stößelhub wurde ein „Okklusionsmodell“ entwickelt. Durch die Kombination beider Modelle lassen sich die Stößelbewegungen berechnen, welche theoretisch für die pulsationsfreie Arbeitsweise einer linearen Schlauchpumpe erforderlich sind. Berücksichtigt wurde insbesondere auch der Fall, bei welchem die Größe der in einer Pumpe tatsächlich verfügbaren Arbeitsraumvolumina von der Größe der im Pumpenmodell berechneten Arbeitsraumvolumina abweicht.

Aufbauend auf der experimentellen Überprüfung des Okklusionsmodells durch Untersuchung der „Verdrängungscharakteristik“ unterschiedlicher Rollenpumpenschläuche wurde der technische Demonstrator einer linearen Schlauchpumpe mit fünf Stößeln entwickelt. Mit diesem Demonstrator wurde die praktische Realisierbarkeit des mit dem Pumpenmodell postulierten pulsationsfreien Volumenstromes nachgewiesen.

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse diskutiert. Die Fehlerbetrachtung erfolgt separat für die Einzelaspekte.

## **7.1 Schlauchcharakteristik**

Für die drei unterschiedlichen getesteten Schlauchtypen (Tygon S3 E-LFL, Tygon 2001, Silikon-schlauch) wurden ähnliche Volumen-Stößelweg-Verläufe gemessen (vgl. Abbildung 56), was insofern zu erwarten war, da alle Schläuche den gleichen Innendurchmesser von 2,79 mm besaßen. Bei den gemessenen Volumen-Stößelweg-Verläufen trat der Verschlusspunkt 200  $\mu\text{m}$  später ein als im Modell vorhergesagt. Die Vorhersageungenauigkeit entspricht damit 7 % des Schlauchinnendurchmessers. Des Weiteren wurde aus den Schläuchen mehr Fluid verdrängt als in dem unter dem Stößel befindlichen Schlauchabschnitt enthalten war. Dies resultiert daraus, dass sich beim Zusammendrücken des Schlauches vor und nach dem Stößel Flanken bildeten, welche ebenfalls Fluid aus dem Schlauch verdrängten. Durch Messungen mit zwei unterschiedlichen Stößellängen ließ sich das durch die Flanken verdrängte Volumen berechnen. Der Volumen-Stößelweg-Verlauf des durch die Flanken verdrängten Volumens war für jeden Schlauchtyp unterschiedlich. Bei den Tygon Schläuchen mit identischer Wandstärke war das durch die Flanken verdrängte Volumen des härteren Schlauches (69 Shore A) geringer als das des weicheren Schlauches (56 Shore A), was auf einen umgekehrten Zusammenhang zwischen Flankenvolumen und Materialhärte (und damit auch Materialsteifigkeit) schließen lässt. Nach Abzug des Flankenanteils waren die Volumen-Stößelweg-Verläufe der unterschiedlichen Schläuche nahezu identisch. Sie ähnelten dem vom Okklusionsmodell vorhergesagten Verlauf mit der Einschränkung, dass sie verglichen mit dem theoretischen Verlauf um den Betrag von 200  $\mu\text{m}$  (7 %) auf der X-Achse gestreckt waren. Dies entspricht genau dem Betrag, um welchen die Verschlusspunkte später eintraten als im Modell vorhergesagt.

### Fazit

Die gemessenen Masse-Stößelweg-Verläufe der drei getesteten Schläuche ähneln dem vom Okklusionsmodell (Kapitel 4.2.1) vorhergesagten Verlauf. Damit ist das Modell grundsätzlich geeignet, den nichtlinearen Zusammenhang des in Abhängigkeit der Okklusion verdrängten Fluids zu beschreiben. Die Experimente zeigen jedoch auch, dass das Modell, bezüglich der Vorhersage des Verschlusspunktes und der Größe des verdrängten Volumens, eine gewisse Ungenauigkeit aufweist. Ein ungenau vorhergesagter Volumen-Stößelweg-Verlauf hätte zur Folge, dass die anhand des Okklusionsmodells berechneten Stößelbewegungen einen ungleichmäßigen und damit nicht pulsationsfreien Volumenstrom erzeugen. Aus diesem Grund wurden für die Berechnung der Stößelbewegungen im Prototyp später die für die einzelnen Kammern gemessenen Volumen-Stößelweg-Verläufe verwendet.

## 7.2 Prototyp einer pulsationsarmen linearen Schlauchpumpe

### Maximaler Stößelhub

Bei den gemessenen Volumen-Stößelweg-Verläufen der Kammern waren die maximalen Stößelhübe geringer als vom Schlauchinnendurchmesser her zu erwarten. Die Ursache für den geringeren Stößelhub bestand in der Konstruktion des Prototyps. Über die zur Feineinstellung verwendeten Exzenter-schrauben (siehe Kapitel 5.2.2) wurden die Stößel so eingestellt, dass sie den Schlauch auch bei maximal geöffneter Kammer unter einer gewissen Vorspannung hielten. Je nach Einstellung der Exzenter konnte der Schlauch in den Kammern 2, 3 und 4 bis zu  $670\text{ }\mu\text{m}$  und in den Kammern 1 und 5 bis zu  $370\text{ }\mu\text{m}$  in Okklusionsrichtung „vorgespannt“ werden. Die unterschiedlichen Einstellungen resultierten daraus, dass die Stößel der Kammern 2, 3 und 4 im Gegensatz zu den Stößeln der Kammern 1 und 5 mit einem  $300\text{ }\mu\text{m}$  hohen Dichtsteg ausgestattet waren. Bei der Einrichtung des Prototyps wurde für die Kammern eine „mittlere Vorspannung“ eingestellt.

### Überokklusion

Die Verschlusspunkte der Kammern wurden so gewählt, dass bei einem eingangsseitigen Fluiddruck von 1 bar der Massenfluss durch die betreffende Kammer vollständig unterbunden wurde. Dies erforderte eine gewisse „Überokklusion“ indem der Schlauch über den vollständigen Verschluss des Lumen hinaus zusammengedrückt wurde. Im Bereich dieser Überokklusion waren die Kammern bereits vollständig entleert und konnten kein weiteres Fluid ausstoßen.

### Messung der Kammercharakteristik

Für die Messung der Kammercharakteristik wurde die Kammer mit konstanter Geschwindigkeit von  $0,05\text{ mm/s}$  geschlossen und die von der Kammer verdrängte Fluidmasse aus dem Integral des gemessenen Massenflusses berechnet. Da der Massenfluss infolge der Massenträgheit nicht abrupt mit der Überokklusion stoppte, sondern über eine Zeit  $< 1\text{ s}$  „abklang“, war der Bereich der Überokklusion (Größenordnung  $0,05\text{ mm}$ ) in den Messwerten nicht als solcher aufgelöst. Eine verbesserte Erfassung der Überokklusion ließe sich zum Beispiel erzielen, indem der Schlauch mit einer geringeren konstanten Geschwindigkeit von beispielsweise  $0,01\text{ mm/s}$  oder schrittweise okkludiert werden würde.

Zur Beschreibung der Kammercharakteristik und anschließenden Berechnung der gemäß Phasenplan erforderlichen Stößelbewegungen wurden in dieser Arbeit Polynome zweiten

Grades verwendet. Diese eignen sich allerdings nur dann, wenn keine Überokklusion berücksichtigt werden muss. Während mit dem Erreichen der vollständigen Okklusion die Änderung des Kammervolumens am größten ist (siehe Abbildung 63), findet ab dem Bereich der Überokklusion keine weitere Änderung des Kammervolumens statt. An dieser Stelle weist die Kammercharakteristik einen „Knick“ auf. Um einen derartigen Verlauf zu approximieren sind Polynome mit einem deutlich höheren Grad erforderlich. Alternativ dazu wurde die Berechnung der Stößelbewegungen aus den diskreten Messwerten der Kammercharakteristik getestet, was allerdings aufgrund der ungenau abgebildeten Überokklusion keine Vorteile gegenüber den Polynomen zweiten Grades brachte.

### 7.2.1 Berechnete Steuerkurven

Mit den berechneten Steuerkurven wurde zunächst kein über den gesamten Arbeitszyklus konstanter Massenfluss erzeugt. Lediglich während der Phasen II und III war der Massenfluss konstant, was bestätigt, dass die Berechnung der Steuerkurven prinzipiell funktioniert. Zur Veranschaulichung der folgenden Ausführungen ist der Massenflussverlauf aus Abbildung 67 in Abbildung 91 kommentiert dargestellt.

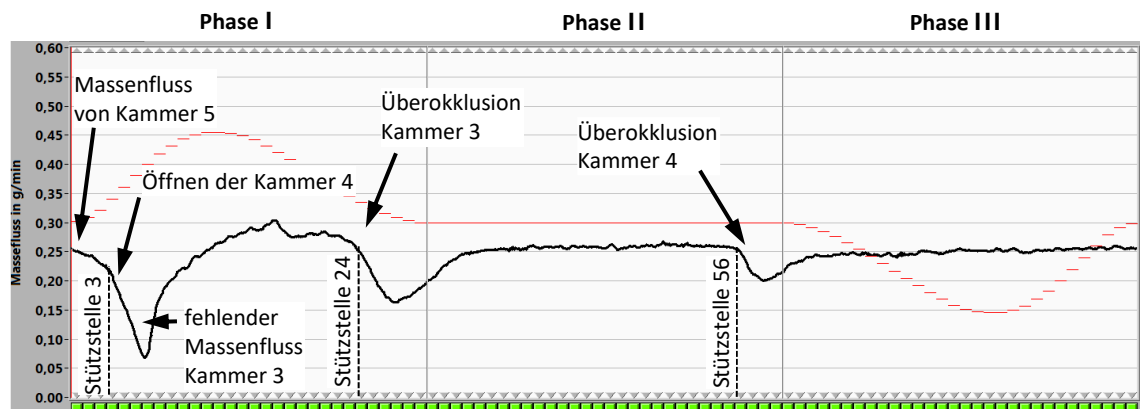


Abbildung 91: Darstellung des mit den berechneten Steuerkurven erzeugten Massenflussverlaufes (schwarz). Die roten Striche zeigen die Stützstellen der Steuerkurve von Kammer 3.

Ursächlich für das Absinken des Massenflusses in den Phasenübergängen war die in der gemessenen Kammercharakteristik nicht abgebildete Überokklusion der Kammern. Mit den Übergangsfunktionen erfolgte die zunehmende Verringerung der Stößelgeschwindigkeit einer sich schließenden Kammer zum Phasenende hin. Dadurch wurde die „Dauer“, in welcher sich diese Kammer in Überokklusion befand, über mehrere Stützstellen ausgedehnt, so dass von der betreffenden Kammer ab den letzten vier bis sechs Stützstellen kein Fluid mehr ausgestoßen wurde.

Die Verringerung des Massenflusses nach Beginn der Phase I wurde ebenfalls durch die Überokklusion verursacht. Diese bewirkte einerseits, dass Kammer 4 später für Fluid durchlässig

wurde als im Phasenplan vorgesehen. Auf Seiten des Pumpeneingangs unterbrach die Kammer 2 gegen Ende der Phase III bereits den Massenfluss in Kammer 3, während Kammer 3 noch öffnete und dadurch nicht vollständig gefüllt wurde. In Folge dessen entsprach das von Kammer 3 am Anfang der Phase I ausgegebene Fluidvolumen nicht der gemäß der Kammercharakterisierung zu erwartenden Größe.

Im Gegensatz zu den Phasen II und III wies der Massenfluss in Phase I keinen konstanten Verlauf auf. Ursächlich dafür war eine Wechselwirkung zwischen den Kammern 3 und 4, da der seitliche Abstand zwischen den Stößeln bauraumbedingt 10 mm betrug. Aus der Abschätzung der Flankenausdehnung in Abbildung 58 ist zu erkennen, dass sich die Flanke eines vollständig okkludierten Schlauches mindestens 8 mm entlang der Schlauchlängsachse ausbreitete. Folglich trat zwischen den Kammern 3 und 4 eine zeitlich variable Überschneidung der Flanken auf. Bei der Messung der Kammercharakteristik wurde diese Wechselwirkung nicht mit berücksichtigt, da jeweils nur die zu charakterisierende Kammer betätigt wurde, wobei die pumpeneingangsseitig davor gelegene Kammer geschlossen und alle pumpenausgangsseitig gelegenen Kammern vollständig geöffnet blieben. Diese Konfiguration entsprach der pumpenausgangsseitigen „Kammeraktivität“ in den Phasen II und III, in welcher die vor der aktiven Kammer gelegene Kammer geschlossen und die nachfolgende Kammer geöffnet blieb. In diesem Sinne stellten die aus der gemessenen Kammercharakteristik berechneten Stößelbewegungen lediglich eine erste Näherung dar, welche die Startwerte für die anschließende Optimierung lieferte.

### **7.2.2 Steuerkurvenoptimierung**

Zunächst wurden die Steuerkurven der Kammern 4 und 5 so angepasst, dass der Massenfluss während der Übergänge zwischen den Phasen I und II sowie II und III konstant blieb. Dies erfolgte durch schrittweises Vergrößern des Stößelhubs in den Stützstellen welche mit dem zu geringen Massenfluss korrelierten. Parallel dazu erfolgte der Ausgleich der Stößelhubbilanz der Kammern durch Vergrößerung des jeweiligen Stößelhubs in Phase I um denselben Betrag. Das dadurch von den Kammern 4 und 5 während der Phase I zusätzlich aufgenommene Fluidvolumen wurde durch Vergrößerung des Stößelhubs der Kammer 3 kompensiert.

In einem zweiten Schritt wurde das Absinken des Massenflusses am Beginn der Phase I korrigiert. Da der Effekt der Überokklusion mit der zuvor beschriebenen Kammercharakterisierung nicht hinreichend genau abgebildet wurde, schlossen die Kammern tatsächlich zeitiger und öffneten dementsprechend auch später als von der Kammercharakteristik angegeben. Dies führte dazu, dass am Ende der Phase III der Massenfluss in die sich zu diesem Zeitpunkt noch

öffnende Kammer 3 durch Kammer 2 bereits vorzeitig unterbrochen wurde. Aufgrund der dadurch unvollständigen Befüllung enthielt Kammer 3 zu Beginn der Phase I weniger Fluid als gemäß Phasenplan zu erwarten war. Die Korrekturmaßnahme bestand darin, das Öffnen von Kammer 3 zeitiger zu beenden, da Kammer 2 gemäß Phasenplan nicht später schließen konnte. Um das Einstromen von Fluid in die sich öffnende Kammer 3 zusätzlich zu begünstigen, wurde das Schließen der Kammer 2 gegen Ende der Phase III außerdem bewusst verzögert (Stützstelle 86 - 88). Ab der Stützstelle 89 erfolgte das schnelle Schließen der Kammer 2 derart, dass die Überokklusion erst mit der letzten Stützstelle (Stützstelle 90) der Phase III eintrat. Da aufgrund der Spezifik des Phasenplanes die Steuerkurven der Kammern 1 und 5 sowie 2 und 4 miteinander gekoppelt sind, bedeutete dies pumpenausgangsseitig, dass Kammer 4 am Anfang von Phase I schneller öffnete. Die dabei von Kammer 4 aufgenommene Fluidmenge musste wiederum durch Kammer 5 gepuffert werden.

Abschließend erfolgte die Steuerkurvenanpassung der Kammer 3 bezüglich eines durchgängig konstanten Massenflusses während der übrigen Phase I.

Im Ergebnis der empirischen Steuerkurvenoptimierung wurde ein ausgesprochen pulsationsarmer Massenfluss von 10 % Ungleichmäßigkeit erzeugt. Am gleichmäßigsten war der resultierende Massenfluss (vgl. Abbildung 68) in den Phasen II und III. Während dieser Phasen wurde der Massenfluss von jeweils einer einzelnen Kammer erzeugt. Lediglich im Übergangsbereich von Phase II zu Phase III erfolgte eine kurzzeitige (Stützstelle 57 bis 60) Überlagerung der von den Kammern 4 und 5 erzeugten Massenflüsse. Der Massenfluss in der Phase I war, verglichen mit den Phasen II und III ungleichmäßiger. Dies ist darauf zurück zu führen, dass in dieser Phase die Kammern 3 bis 5 an der Erzeugung des Massenflusses beteiligt waren. Insbesondere in Folge der Wechselwirkung zwischen der Kammer 3 und 4 erforderte die Steuerkurvenoptimierung für die Phase I ein zeitaufwändiges iteratives Vorgehen, während die Steuerkurvenoptimierung für die Phasen II und III sowie deren Übergang durch die sehr einfache Systematik „Wenn zu wenig Massenfluss, dann an dieser Stelle mehr Stößelhub“ erfolgte. Eine Vereinfachung der Steuerkurvenoptimierung der Phase I lässt sich erreichen, wenn die Wechselwirkung der Kammern 3 und 4 (und auch Kammer 2) durch Vergrößerung des Stößelabstandes ausgeschlossen wird.

### **7.2.3 Aufgezeichnete Antriebspositionen**

Wie erwartet zeigten die Abweichungen der Antriebspositionsverläufe einen systematischen Verlauf, welcher zusätzlich gewissen zufälligen Schwankungen unterlag. Der systematische Verlauf resultierte daraus, dass die Antriebe ihre Geschwindigkeit nicht sprunghaft änderten,

sondern für eine Geschwindigkeitsänderung beschleunigen mussten. Dies führte dazu, dass die Antriebspositionen den vorgegebenen Positionen systematisch „nacheilten“. Es gab jedoch auch Positionen, an denen die Antriebsbewegungen den vorgegebenen Positionen vorausseilten. Diese resultierten aus der softwareseitigen Kompensation des Umkehrspiels der Motorgetriebe, welche bei jedem Richtungswechsel der Antriebe erfolgte. Besonders gut war die Umkehrspielkompensation in den aufgezeichneten Antriebspositionen von Kammer 3 zu erkennen (vgl. Abbildung 70), bei denen die Antriebsposition an der Stützstelle 60 der vorgegebenen Position exakt um den Betrag des Umkehrspiels von 5  $\mu\text{m}$  vorauseilte.

Die den systematischen Abweichungen überlagerten zufälligen Schwankungen resultierten aus den Schwankungen der Latenzzeiten in der Kommunikation zwischen PC (Windows 7) und der Antriebssteuerung. Prinzipiell lassen sich diese Schwankungen durch mehrmaliges Messen der Antriebspositionsverläufe „herausmitteln“. Eine vollständige Beseitigung derartiger Schwankungen ließe sich durch die Verwendung eines echtzeitfähigen Systems erreichen. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Entwicklung eines geeigneten Pumpenmodells und dem Nachweises von dessen Übertragbarkeit auf ein reales System lag, wurde im Zuge der damit verbunden umfangreichen Softwareentwicklung zunächst auf die Verwendung eines Echtzeitsystems, zum Beispiel in Form eines Mikrokontrollers, verzichtet. Die gewählte Antriebssteuerung via LabView und „Windows-PC“ erwies sich für den prinzipiellen Nachweis der Funktionstüchtigkeit des Prototyps als geeignet. Eine Verbesserung der Genauigkeit des Prototyps bleibt zukünftigen Arbeiten, zum Beispiel im Sinne einer Produktentwicklung, vorbehalten.

#### **7.2.4 Vergleich des Prototyps mit gebräuchlichen Schlauchrollenpumpen**

Die für die Schlauchrollenpumpen aufgezeichneten Massenflussverläufe bestätigten den eingangs beschriebenen Zusammenhang zwischen Rollenzahl und Pulsation (Ungleichmäßigkeit). Die 5-Rollen-Pumpe erzeugte den Massenfluss mit der größten Pulsation. Die Pulsation der 12-Rollen-Pumpe war im Vergleich dazu geringer, jedoch insbesondere bei kleinen Drehzahlen (147 % bei 0,03 Hz) zum Teil mehr als dreimal so groß wie die Pulsation des Prototyps (40 % bei 0,02 Hz). Bei allen drei Pumpen war die Pulsation drehzahlabhängig. Die Pulsation war jeweils bei der kleinsten Antriebswellendrehzahl am größten und nahm mit zunehmender Drehzahl ab, bis ein drehzahlunabhängiges Minimum erreicht wurde. Neben der passiven Dämpfung des elastischen Pumpschlauches war dies vor allem auf die frequenzabhängige pulsationsdämpfende Wirkung des viskosen Fluids (Findeisen & Findeisen 1994) zurückzuführen. Die Pulsation der 5-Rollen-Pumpe erreichte ab 0,5 Hz ein drehzahlunabhängiges Minimum von 40 % Ungleichmäßigkeit. Die Pulsation der 12-Rollen-Pumpe nahm verglichen mit dem Prototyp

weniger schnell ab, war jedoch ab 0,6 Hz geringer als beim Prototyp und erreichte ab 1 Hz ein drehzahlunabhängiges Minimum von 5 %. Verglichen mit den Rollenpumpen, nahm die Pulsation des Prototyps am schnellsten mit der Drehzahl ab. Bereits ab 0,09 Hz wurde ein drehzahlunabhängiges Minimum von 13 % Ungleichmäßigkeit erreicht. Damit war die Pulsation des Prototyps sehr gering, jedoch bei größeren Drehzahlen um den Faktor 2,6 größer als die der 12-Rollen-Pumpe. Auf die Ursache wird im Folgenden noch genauer eingegangen.

Den größten Massenfluss in Abhängigkeit der Drehzahl erzeugte die 5-Rollen-Pumpe. Bei gleicher Drehzahl war der von der 12-Rollen-Pumpe erzeugte Massenfluss geringer, ebenso wie dessen Ungleichmäßigkeit. Den geringsten drehzahlabhängigen Massenfluss erzeugte der Prototyp der linearen Schlauchpumpe. Im Gegensatz zu der 12-Rollen-Pumpe, bei welcher der Zusammenhang zwischen Massenfluss und Drehzahl vollkommen linear war, verringerte sich bei der 5-Rollen-Pumpe und dem Prototyp der Anstieg des drehzahlabhängigen Massenflusses mit zunehmender Drehzahl. Sowohl für die 5-Rollen-Pumpe als auch den Prototyp waren die Verschlusspunkte so eingestellt, dass bis zu einer Druckdifferenz von 1 bar kein Fluid den geschlossenen Schlauchabschnitt passieren konnte. Da der durch den fluidischen Widerstand des Massenflusssensors erzeugte Gegendruck am Pumpenausgang bei beiden Pumpen stets kleiner war als 1 bar, kann das Auftreten eines Rückflusses zum Pumpeneingang ausgeschlossen werden. Stattdessen bestand die Ursache im dem für Polymerwerkstoffe typischen viskoelastischen Verhalten, aufgrund dessen die Rückverformung der Schläuche nach Abheben des Stößels oder Rollers eine Hysterese aufwies. Infolge dieser Hysterese richteten sich die Schläuche bei größeren Betätigungsgeschwindigkeiten nicht mehr schnell genug auf und wurden mit dementsprechend weniger Fluid gefüllt. Für den Prototyp war dies bei steigender Drehzahl durch ein Absinken des Massenflusses am Anfang von Phase I zu erkennen (siehe Abbildung 82 und Abbildung 83). In Folge der unvollständigen Befüllung wurde von Kammer 3 weniger Fluid als benötigt abgegeben, was unter anderem dazu führte, dass der erzeugte Massenfluss auch bei größeren Drehzahlen eine Ungleichmäßigkeit von 13 % aufwies. Eine Möglichkeit diese Ungleichmäßigkeit zu reduzieren wird in Kapitel 7.2.10 aufgezeigt.

Der für die 12-Rollen-Pumpe gemessene lineare Zusammenhang zwischen Massenfluss und Drehzahl war auf die größere Rollenanzahl in Kombination mit einem geringen Rollenabstand zurückzuführen. Während in der 5-Rollen-Pumpe der Abstand zwischen den Rollen so groß war, dass sich die dort befindlichen Schlauchabschnitte nahezu vollständig „aufrichten“ konnten, war bei der 12-Rollen-Pumpe der Rollenabstand derart gering, dass die Schlauchabschnitte zwischen den Rollen unter einer starken transversalen Vorspannung (in Okklusionsrichtung) gehalten wurden. Zusammen mit einer longitudinalen Vorspannung des Schlauches um 17 % führte dies



dazu, dass im getesteten Drehzahlbereich keine merkliche Hysterese beim Aufrichten der unbelasteten Schlauchabschnitte auftrat.

### 7.2.5 Gegendruckabhängigkeit

Grundsätzlich alle Verdrängerpumpen besitzen eine steife Förderkennlinie (Parker 1994; Vetter 2006). Das heißt, der erzeugte Volumenstrom ist nahezu unabhängig vom am Pumpenausgang anliegenden Gegendruck. Auch für den Prototyp der linearen Schlauchpumpe sollte dies gelten. Erst ab Gegendrücken von größer als 1 bar wäre eine Abnahme des Massenflusses zu erwarten gewesen, da die Verschlusspunkte der Kammern auf einen maximalen Gegendruck von 1 bar ausgelegt waren.

Die Gegendruckabhängigkeit wurde für die Antriebsdrehzahlen 0,5 Hz, 1 Hz und 2 Hz getestet. Es zeigte sich, dass auch bei Gegendrücken kleiner 1 bar der erzeugte Massenfluss mit dem Gegendruck abnahm. Dieser Zusammenhang war annähernd linear. Hochwahrscheinlich war dies auf die Elastizität des Pumpschlauches zurückzuführen. Durch den am Pumpenausgang wirkenden Gegendruck wurde der Schlauch „aufgeblasen“ und dadurch mechanisch „gespannt“. Ein geringer Teil dieser mechanischen Spannung konnte sich in den Pumpeneingang entladen. Konkret betraf das den zwischen Kammer 2 und 3 gelegenen Schlauchabschnitt, welcher in Phase II (Phasenplan) durch den Verschluss von Kammer 3 vom Pumpenausgang getrennt wurde, und sich infolge des geringeren pumpeneingangsseitigen Drucks beim Öffnen der Kammer 2 wieder zusammenzog, wodurch ein pumpenausgangsseitig gerichteter Massenfluss erzeugt wurde. Dieser Rückfluss war umso größer, je größer der Gegendruck und damit die mechanische Spannung im Schlauch war.

Ab Gegendrücken größer als 1 bar nahm der erzeugte Massenfluss progressiv ab. Dies ist dadurch zu erklären, dass zusätzlich zu dem, durch das „Aufblasen“ des Schlauches verursachten Rückfluss, mit dem Gegendruck die Undichtigkeit der Verschlusspunkte zunahm.

Die druckabhängige elastische Dehnung des Schlauches und die Undichtigkeit der Verschlusspunkte wirkten sich auch auf die Ungleichmäßigkeit und damit Pulsation des erzeugten Massenflusses aus. Die Ungleichmäßigkeit nahm mit steigendem Gegendruck zunächst annähernd linear und bei größeren Gegendrücken als 1 bar progressiv zu.

Die Gegendruckabhängigkeit in Folge der elastischen Dehnung ließe sich durch die Verwendung steiferer Schläuche verringert. Bei der Undichtigkeit der Verschlusspunkte hingegen handelt es sich um einen Frage der Auslegung. In dieser Arbeit wurden die Verschlusspunkte auf einen maximalen Gegendruck von 1 bar ausgelegt. Grundsätzlich lassen sich die Verschlusspunkte

auch auf größere Gegendrücke auslegen, was wiederum eine größere Überokklusion nach sich zieht, welche in den Steuerkurven zu berücksichtigen ist. Für die Auslegung der Verschlusspunkte maßgebend sind letztlich die, bezüglich der „Gegendruckfestigkeit“ gestellten Anforderungen an die Pumpe.

### **7.2.6 Förderrichtungsumkehr**

Bei den Schlauchrollenpumpen ist die Umkehrbarkeit der Förderrichtung durch deren Funktionsprinzip grundsätzlich gegeben. Im Gegensatz dazu eignen sich nicht alle linearen Schlauchpumpen für eine Förderrichtungsumkehr (Kabayashi & Morikawa 1981; Faeser 1989; Geschwender 2013), was deren Einsatzspektrum einschränkt.

Durch den Betrieb des Prototyps in gegenläufiger Förderrichtung wurde die Umkehrbarkeit des erzeugten Massenflusses nachgewiesen. Analog zu den Schlauchrollenpumpen ließ sich die Förderrichtungsumkehr durch die Änderung der Drehrichtung der Antriebswelle erreichen. Der für den Prototyp gemessene, drehzahlabhängig erzeugte Massenfluss war für beide Förderrichtungen gleich groß, gemäß der im Modell aufgestellten Volumenstrombilanz.

### **7.2.7 Unregelmäßigkeit im Massenflussverlauf**

Die im Übergang von Phase III zu Phase I aufgetretene Ungleichmäßigkeit des mit dem Nockenwellenantrieb erzeugten Massenflusses konnte auf die Kurvenscheibe der Kammer 5 zurückgeführt werden. Ein Fertigungsfehler wurde durch Vermessung der Kurvenscheibenaußenkontur (Arbeitskurve) ausgeschlossen. Stattdessen bestand die Ursache in der Kurvenscheibenauslegung selbst, welche aufgrund zufälliger Schwankungen der aufgezeichneten Antriebspositionen des Linearantriebes von Kammer 5 nicht optimal erfolgte.

Die Berechnung der Kurvenscheiben basierte auf den aufgezeichneten Antriebspositionen und den damit gemessenen Stößelpositionen. In Abbildung 70 wurde gezeigt, dass die aufgezeichneten Antriebspositionsverläufe für eine Kammer stets den gleichen systematischen Verlauf aufwiesen, sich jedoch aufgrund zufälliger Schwankungen um wenige  $\mu\text{m}$  voneinander unterschieden. Durch Verwendung der Mediane wurden diese zufälligen Schwankungen teilweise herausgerechnet.

Bei den mit Lauf 1 bis 3 bezeichneten Antriebspositionsverläufen für Kammer 5 trat der Fall auf, dass sich die an der ersten Stützstelle gemessene Antriebsposition einer der Messungen deutlich von den an dieser Stelle gemessenen Antriebspositionen der anderen beiden Messungen unterschied (vgl. Abbildung 70). Diese Abweichung wurde als ein zufälliger Effekt in Folge schwankender Latenzzeiten des Windows-Betriebssystems interpretiert, welcher aufgrund der Verwendung des Median nicht ins Gewicht fällt. Später wurde genau diese Stützstelle als

Ursache für die Unregelmäßigkeit im Massenflussverlauf identifiziert, woraufhin eine Wiederholungsmessung der Antriebspositionen mit  $n = 10$  erfolgte. Der Vergleich der Antriebspositionen von Lauf 1 bis 3 mit dem aus der Zehnfachmessung berechneten mittleren Verlauf zeigte, dass die in den Läufen 1 bis 3 aufgezeichneten Antriebspositionen an der Stützstelle 1, im Vergleich zu allen anderen Stützstellen, deutlich von dem Mittelwert der Zehnfachmessung abweichen. Dies deutet darauf hin, dass es bei der Aufzeichnung der Antriebspositionen in den Läufen 1 bis 3 zu einer Koinzidenz größerer Latenzzeitschwankungen kam, in Folge derer bei keinem der drei Läufe die korrekte Antriebsposition für die Stützstelle 1 aufgezeichnet wurde. Dies führte wiederum dazu, dass der Führungskurvenradius der Kurvenscheibe der Kammer 5 an der betreffenden Stelle nicht optimal berechnet wurde. Retrospektiv betrachtet wären deutlich mehr als drei Aufzeichnungen der Antriebspositionsverläufe sinnvoll gewesen, um die zufälligen Schwankungen der Antriebspositionen zuverlässig „herauszumitteln“. Der dadurch aufgetretene Fall der nicht optimal gestalteten Kurvenscheibe veranschaulicht die „Sensitivität“ des Massenflusses auf Abweichungen von den optimierten Stoßelhubverläufen. Der Unterschied zwischen tatsächlichem Führungskurvenradius und dem als optimal angenommenen Führungskurvenradius (vgl. Abbildung 80) betrug an der betreffenden Stelle  $13\text{ }\mu\text{m}$ . Diese Abweichung vom Optimum verursachte eine Ungleichmäßigkeit von 30 % (bei 0,03 Hz).

### **7.2.8 Positioniergenauigkeit der Schlauchaufnahme**

Die Versuche zur Reproduzierbarkeit zeigten, dass bereits das Entnehmen und erneute Einlegen desselben Schlauches in die Pumpe eine messbare Veränderung des zeitlichen Massenflussverlaufes bewirkte. Dies verdeutlicht die Bedeutung der reproduzierbaren Positionierung des Schlauches in der Pumpe.

Im Prototyp erfolgte die Positionierung des Schlauches durch eine Kombination aus seitlicher Führung der nicht als Pumpkammer verwendeten Schlauchabschnitte und durch Vorspannung in Schlauchlängsrichtung. Die gewählte longitudinale Vorspannung war mit 3 % vergleichsweise gering. Bei den beiden getesteten Schlauchrollenpumpen erfolgte ebenfalls eine longitudinale Vorspannung des Schlauches, welche bei der 5-Rollen-Pumpe mit 7 % annähernd doppelt so groß und bei der 12-Rollen-Pumpe mit 17 % um ein Vielfaches größer war. Da durch die Vorspannung die Kontaktkraft zwischen den Schlauchstoppfern und der Schlauchaufnahme sowie die Steifigkeit des Schlauches gegenüber seitlicher Verformung zunimmt, ließe sich mit einer größeren Vorspannung die Wiederholgenauigkeit der Schlauchpositionierung im Prototyp verbessern.

### **7.2.9 Übertragbarkeit der Steuerkurven auf Schläuche desselben Typs**

Der drehzahlabhängige Massenfluss und die drehzahlabhängige Ungleichmäßigkeit wiesen für verschiedene Schläuche desselben Typs einen ähnlichen Verlauf auf. Die gemessene Ungleichmäßigkeit war größer als bei dem für die Optimierung verwendeten Schlauch. Dies ist dadurch zu erklären, dass die zuvor eingestellten Verschlusspunkte nicht optimal zu den anderen Schläuchen passten, da bei jedem Schlauch der Innendurchmesser und die Wandstärke fertigungsbedingten Schwankungen unterliegt. Um mit jedem Schlauch einen ähnlich pulsationsarmen Massenfluss zu erzeugen, wäre bei jedem Schlauchwechsel eine erneute Feineinstellung der Verschlusspunkte nötig. Im Einsatz der Pumpe wäre dies allerdings kaum praktikabel, da für diese Einstellung ein an die Pumpe angeschlossener Massenfluss-beziehungsweise Volumenstromsensor zur Kontrolle der Pulsation erforderlich ist.

Verglichen mit dem Prototyp ist bei Schlauchrollenpumpen die Verschlusspunkteinstellung einfacher gestaltet und für deren Funktion weniger kritisch. Entweder wird der Verschlusspunkt in der Schlauchaufnahme automatisch über eine Federkraft oder manuell mit einer Stellschraube eingestellt. Eine exakte Einstellung ist nicht zwingend erforderlich, da Schlauchrollenpumpen ohnehin keinen pulsationsfreien Volumenstrom erzeugen. Bei zu gering eingestelltem Verschlusspunkt nimmt die Förderrate der Pumpe ab, da infolge der unvollständigen Okklusion ein Leckstrom zum Pumpeneingang auftritt. Die unvollständige Okklusion wird zum Beispiel bewusst genutzt um sensible Fluide wie Blut zu „schonen“ (Peek *et al.* 1999). Ein zu stark eingestellter Verschlusspunkt (Überokklusion) bietet sich an, um bei fertigungsbedingt schwankenden Schlauchwandstärken die zuverlässige Funktion der Pumpe zu gewährleisten. Allerdings nimmt dadurch der Schlauchverschleiß zu (Vetter 2006; Aitavade *et al.* 2012).

### **7.2.10 Übertragbarkeit der Steuerkurven auf einen anderen Schlauchtyp**

Erwartungsgemäß trat bei der Anwendung der Steuerkurven auf einen anderen Schlauchtyp (Tygon 2001) eine größere Ungleichmäßigkeit im Massenfluss auf als bei den Schläuchen des für die Optimierung verwendeten Typs (Tygon S3 E-LFL).

In den Phasen II und III war der mit den Tygon 2001-Schläuchen erzeugte Massenfluss nahezu konstant, während er in Phase I die größte Ungleichmäßigkeit aufwies (vgl. Abbildung 88). Verglichen mit den Tygon S3 E-LFL-Schläuchen kam es am Beginn der Phase I bei allen Tygon 2001-Schläuchen zu einem stärkeren „Überschwingen“ des Massenflusses. Im Verlauf der Phase I war der Massenfluss dagegen teilweise geringer als der mittlere Massenfluss. Die im Vergleich zu den anderen beiden Phasen starken Massenflussschwankungen während der

Phase I lassen sich dadurch erklären, dass sich die größere Materialhärte der Tygon 2001-Schläuche insbesondere auf die Wechselwirkung der Flanken der Kammern 3 und 4 auswirkte. Bei einer Drehzahl kleiner 0,5 Hz war die Ungleichmäßigkeit im Massenfluss größer als bei den Tygon S3 E-LFL-Schläuchen. Ab einer Drehzahl von 0,5 Hz war die Ungleichmäßigkeit dagegen geringer als bei den Tygon S3 E-LFL-Schläuchen. Auch die Linearität des drehzahlabhängig erzeugten Massenflusses war besser als bei den Tygon S3 E-LFL-Schläuchen. Beides lässt auf ein, im Vergleich zu den Tygon S3 E-LFL-Schläuchen (56 Shore A), besseres Rückstellverhalten der um 23 % härteren, und damit auch steiferen Tygon 2001-Schläuche (69 Shore A) schließen.

Die Versuche zur Übertragbarkeit der Steuerkurven auf einen anderen Schlauchtyp zeigten, dass die für einen Tygon S3 E-LFL-Schlauch optimierten Steuerkurven nicht optimal zu den härteren Tygon 2001-Schläuchen passten. Die Verwendung unterschiedlicher Schlauchtypen in einer Pumpe erfordert somit eine schlauchtypenspezifische Optimierung der Steuerkurven und dementsprechend auch die Verwendung schlauchtypenspezifischer Nockenwellen.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung der theoretischen Grundlagen für pulsationsfreie lineare Schlauchpumpen und darauf aufbauend der praktische Nachweis der prinzipiellen technischen Realisierbarkeit. Das hierfür entwickelte Modell der in der Pumpe erzeugten geometrischen Volumenströme liefert die grundlegende Beschreibung des zeitlichen Zusammenwirkens der einzelnen Pumpkammern. Im Gegensatz zu den bisher bekannten Konzepten (Faeser 1989; Feller & Schimmelpfennig 2010) wird nicht ausschließlich die Volumenänderung der einzelnen Arbeitsräume betrachtet, sondern insbesondere die Kontinuität der ersten und zweiten Ableitung davon sichergestellt und damit Praxisnähe erreicht (z.B. endliche Stößelbeschleunigungen). In Kombination mit der experimentell ermittelten Kammercharakteristik eines Pumpenprototyps liefert das Modell eine Vorhersage der zur Erzeugung eines pulsationsfreien Volumenstromes (bzw. Massenflusses) erforderlichen Stößelbewegungen. Da die experimentell ermittelte Kammercharakteristik das Verhalten der Kammern im Pumpbetrieb nur näherungsweise abbildete, war eine zusätzliche empirische Optimierung erforderlich, in deren Ergebnis ein nahezu pulsationsfreier Volumenstrom mit einer Restungleichmäßigkeit von 10 % erzeugt werden konnte.

Die Übertragung der optimierten Steuerkurven auf eine Nockenwelle erforderte einen mehrstufigen Prozess der Erfassung der tatsächlich ausgeführten Stößelbewegungen. Anhand des mit dem Nockenwellenantrieb erzeugten Massenflusses wurde ersichtlich, dass die Messung der tatsächlichen Stößelbewegungen weiteres Optimierungspotenzial birgt.

Der Vergleich des Prototyps der linearen Schlauchpumpe mit zwei unterschiedlichen Schlauchrollenpumpen zeigte, dass bei allen Pumpen die Pulsation bei niedriger Drehzahl am größten war und mit steigender Drehzahl abnahm. Im Vergleich zu den Schlauchrollenpumpen war die Pulsation des Prototyps in einem Drehzahlbereich zwischen 0,01 Hz und 0,5 Hz um bis zu eine Größenordnung geringer. Ab Drehzahlen größer als 0,5 Hz war die Pulsation des Prototyps immer noch gering, jedoch größer als die der 12-Rollen-Pumpe. Durch die Verwendung eines Schlauches aus härterem Material verringerte sich die Pulsation der linearen Schlauchpumpe in diesem Drehzahlbereich deutlich.

Verglichen mit den getesteten Schlauchrollenpumpen erzeugte der Prototyp den geringsten drehzahlabhängigen Massenfluss. Um mit Schlauchrollenpumpen kleine Flussraten zu erzeugen, müssen diese mit kleinumigen Schläuchen ausgestattet und mit sehr geringen Drehzahlen betrieben werden, was wiederum eine große Pulsation mit sich bringt. Im Gegensatz dazu lassen

sich mit linearen Schlauchpumpen auch mit großlumigen Schläuchen sehr kleine Flussraten erzeugen. Die kleinere Förderleistung ist eine generelle Eigenschaft des Prinzips der linearen Schlauchpumpen. Der Vorteil besteht darin, dass der Pumpschlauch, im Gegensatz zu den Schlauchrollenpumpen, deutlich seltener okkludiert wird und dementsprechend auch der Schlauchverschleiß um ein Vielfaches geringer ist. Während bei den Schlauchrollenpumpen infolge des Schlauchverschleißes die Förderrate mit der Zeit abnimmt, lässt sich mit linearen Schlauchpumpen ein ausgesprochen langzeitstabiler Volumenstrom erzeugen (Peek *et al.* 1999). Der in dieser Arbeit entwickelte neue Typus linearer Schlauchpumpen ist in der Lage, sehr kleine Flussraten mit im Vergleich zu Schlauchrollenpumpen besonders geringer Pulsation zu erzeugen. Damit eignet sich die neue Pumpe insbesondere für präzise Langzeitdosieraufgaben sowie die besonders schonende Förderung schubspannungsempfindlicher Fluide.

## **8.2 Ansätze zur weiterführenden Forschung**

In dieser Arbeit wurden die theoretischen Grundlagen für einen Typus pulsationsfreier linearer Schlauchpumpen entwickelt und die Funktionstüchtigkeit dieses Prinzips mit einem technischen Demonstrator nachgewiesen. Für die künftige praktische Nutzung des Pumpentyps ist es erforderlich, mit allen Exemplaren eines Schlauchtyps Massenflüsse identischer Größe und Pulsation zu reproduzieren, trotz fertigungsbedingter Unterschiede der Schläuche. Dies erfordert eine deutlich komplexere Optimierung anhand einer repräsentativen Stichprobe von Schläuchen des gewünschten Typs. Die resultierenden Steuerkurven entsprechen dann nicht mehr dem Optimum für ein einzelnes Schlauchexemplar, sondern stellen den bestmöglichen Kompromiss, im Sinne des kleinsten gemeinsamen Fehlers, für die Gesamtheit der Exemplare eines Schlauchtyps dar. Die Herausforderung besteht in der Fülle der zu optimierenden Parameter. Die Steuerkurve einer einzelnen Pumpkammer wurde in dieser Arbeit durch 90 Stützstellen abgebildet. Für die fünf Kammern der Pumpe resultierten damit zunächst 450 Einzelparameter, von denen allerdings 90 Parameter bereits dadurch definiert waren, dass die Kammern 2, 3 und 4 je eine Phase lang geschlossen blieben. Die verbleibenden 360 Parameter ließen sich gemäß der in Kapitel 4.1.2 getroffenen Symmetriebedingung auf 180 Parameter reduzieren. Während der Steuerkurvenoptimierung erforderte jede Veränderung von einem dieser 180 Parameter das Anpassen von mindestens einem weiteren Parameter derselben Kammer, um die Stößelhubbilanz wieder auszugleichen. Die Veränderung eines Parameters kann sich auch auf den gesamten in der betreffenden Phase von der betreffenden Kammer erzeugten Massenflussverlauf auswirken. In diesem Fall ist es erforderlich weitere Parameter anzupassen, entweder für die betreffende Kammer, für eine andere Kammer oder eine Kombination davon. Gesteigert wird die Komplexität der Steuerkurvenoptimierung durch die

Suche nach einem gemeinsamen Optimum für eine größere Anzahl von Schlauchexemplaren. Einen möglichen Ansatz für diese Optimierungsaufgabe stellt die sogenannten Response Surface Methode dar, bei welcher durch Metamodelle Vorhersagen bezüglich der optimalen Parameterkonstellationen getroffen werden. Diese Metamodelle basieren auf experimentell ermittelten Massenflussverläufen einer Vielzahl möglicher Parameterkonstellationen. Durch Methoden der statistischen Versuchsplanung (design of experiments) lassen sich die erforderlichen Parameterkonstellationen berechnen, um bei einer minimalen Anzahl an Experimenten eine definierte oder größtmögliche „Abdeckung“ des Parameterraums zu erreichen.

Die Untersuchung verschiedener Schläuche bezüglich deren Eignung für die entwickelte Pumpe stellt einen anderen weiterführenden Forschungsansatz dar. Neben den in dieser Arbeit getesteten Schlauchtypen existiert eine Vielzahl weiterer Peristaltikpumpenschläuche, welche sich hinsichtlich Wandstärke und Schlauchmaterial zum Teil erheblich unterscheiden. In dieser Arbeit wurde bereits gezeigt, dass die Materialhärte des Schlauches einen Einfluss auf die Pulsation hat. So war ab Arbeitszyklusfrequenzen von 0,5 Hz und größer die Pulsation (Ungleichmäßigkeit) mit dem Schlauchmaterial größerer Shore A Härte um 37 % geringer, hochwahrscheinlich in Folge einer flacheren Hysterese des härteren Schlauchmaterials und des damit schnelleren Rückstellverhaltens. Grundsätzlich ist davon auszugehen, dass auch die Wandstärke sowie die Vorspannung eines Schlauches dessen Rückstellverhalten beeinflussen. Je besser dieses Rückstellverhalten ist, umso geringer wird auch die Restpulsation bei größeren Arbeitszyklusfrequenzen sein. Durch die systematische Untersuchung verschiedener Schlauchtypen besteht daher die Möglichkeit für eine weitere Verringerung der ohnehin bereits sehr geringen Pulsation des in dieser Arbeit entwickelten Typs einer linearen Schlauchpumpe.



## Literaturverzeichnis

- Aitavade, E.N., Patil S. D., Kadem, A.N. und Mulla T. S.** (2012), An Overview of peristaltic pump suitable for handling of various slurries and liquids. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, pp. 19–24.
- Berg, J.M. und Dallas, Tim** (2015), Peristaltic Pumps. Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics, pp. 2693–2701.
- Bommer, J., Ritz, E., Waldherr, R. und Gastner, M.** (1981), Silicone cell inclusions causing multi-organ foreign body reaction in dialysed patients. The Lancet, Vol. 317 No. 8233, p. 1314.
- Borgström, P.E., Clementz, L. und Grände, Per-Olof** (1981), A servo-controlled roller pump for constant flow or constant pressure blood perfusion under normal pulsatile or non-pulsatile conditions. Acta Physiologica Scandinavica, Vol. 112 No. 4, pp. 437–442.
- Briceno, J.C. und Runge, T. M.** (1992), Tubing spallation in extracorporeal circuits. An in vitro study using an electronic particle counter. The International journal of artificial organs, Vol. 15 No. 4, pp. 222–228.
- Casimir, W. von** (1970), Pulsefree peristaltic pump., No. US3726613.
- Casimir, W. von** (1974), Pulsefree peristaltic pump and method of operating same., No. US3826593 A.
- DeBakey, M.E.** (1934), A simple continuous flow blood transfusion instrument. New Orleans Med Surg J, Vol. 87, pp. 386–389.
- Dhumal, S.R. und Kadam, S. S.** (2012), Design and Development of Rotary Peristaltic Pump. International Journal of Science and Advanced Technology, Vol. 2 No. 4, pp. 157–163.
- Durandy, Y., Wang, S. und Ündar, Akif** (2014), An original versatile nonocclusive pressure-regulated blood roller pump for extracorporeal perfusion. Artificial organs, Vol. 38 No. 6, pp. 469–473.
- Ejsing, H.** (2010), PERISTALTIC PUMPS – AN ANSWER TO INCREASING DEMANDS WITHIN THE BIOPHARMA INDUSTRY. european INDUSTRIAL PHARMACY, No. 6, pp. 15–17.
- Esser, J.** (1996), *Adaptive Dämpfung von Pulsationen in Hydraulikanlagen. Aachener Beiträge zum Kraftfahr- und Maschinenwesen.* Bd. 10. 1. Aufl, Verl. der Augustinus-Buchh., Aachen.
- Faeser, U.** (1989), Vorrichtung zum Injizieren von Flüssigkeiten., No. DE3923457C2.
- Feller, K.-H. und Schimmelpfennig, Michael** (2010), Method and apparatus for the pulsation-free volumetric delivery of fluids and suspensions., No. EP2419636B1.

- Findeisen, D. und Findeisen, F.** (1994), *Ölhydraulik: Handbuch für die hydrostatische Leistungsübertragung in der Fluidtechnik*. 4., völlig neubearbeitete Aufl, Springer-Verlag, Berlin.
- Geschwender, R.C.** (2013), Linear peristaltic pump having a platen and pressure plate with curved surfaces., No. US8777597.
- Goenechea, E.** (2007), *Mechatronische Systeme zur Pulsationsminderung hydrostatischer Verdrängereinheiten*. Reihe Fluidtechnik / D. Bd. 45, Shaker, Aachen.
- Gülich, J.F.** (2010), *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*. 4., aktualisierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag.
- Hagen, L. und Koslov, Aleksandr P.** (2010), Pulseless peristaltic pump., No. US7645127 B2.
- Ivantysyn, J. und Ivantysynova, M.** (1993), *Hydrostatische Pumpen und Motoren: Konstruktion und Berechnung*. Vogel-Fachbuch. 1. Aufl, Vogel, Würzburg.
- Kabayashi, S. und Morikawa, Hideyuki** (1981), Vorrichtung zum Verhindern von beim Betrieb einer peristaltischen Fluid-Infusionspumpe hervorgerufenen Pulsationen des geförderten Fluids., No. DE000003104873.
- Karsten, W.J.** (1773), *Abhandlung über die vortheilhafteste Anordnung der Feuersprützen, welche den von der Königl. Dänischen Societät der Wissenschaften in Copenhagen auf das Jahr 1771 ausgesetzt gewesenen ersten Preis erhalten hat: Nebst noch einer Abhandlung über die allgemeine Theorie von der Bewegung des Wassers in Gefäßen und Röhren*, Röse.
- Kiesbauer, J.** (1991), Selbstanpassende Pulsationsminderer in hydraulischen Systemen. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt.
- Kurr, K.-J.** (1994), Aktive Systeme zur Minderung von Pulsationen in hydraulischen Anlagen. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt.
- Leong, A.S., Disney, A.P. und Gove, D. W.** (1982), Spallation and migration of silicone from blood-pump tubing in patients on hemodialysis. The New England journal of medicine, Vol. 306 No. 3, pp. 135–140.
- Mohrman, D.E.** (1980), A servo-controlled roller pump for cardiovascular research. American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology, Vol. 238 No. 2, pp. H269-H274.
- Moscato, F., Colacino, F.M., Arabia, M. und Danieli, Guido A.** (2008), Pressure pulsation in roller pumps: a validated lumped parameter model. Medical engineering & physics, Vol. 30 No. 9, pp. 1149–1158.
- Nelson, J.E. und Bartz, Troy A.** (2014), Method and apparatus for a peristaltic pump., No. US8864474 B2.

- Nollau, R. und Herschel, D.** (2011), *Hydraulik: Grundlagen, Komponenten, Schaltungen*. 5., neu bearb. und erw. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg.
- Orenstein, J.M., Sato, N., Aaron, B., Buchholz, B. und Bloom, Sherman** (1982), Microemboli observed in deaths following cardiopulmonary bypass surgery. *Human Pathology*, Vol. 13 No. 12, pp. 1082–1090.
- Parker, D.B.** (1994), POSITIVE DISPLACEMENT PUMPS-PERFORMANCE AND APPLICATION., in Childs, D.W., Bailey, J.C. and Texas A & M University. *Turbomachinery Laboratory* (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Pump Users Symposium*, Turbomachinery Laboratory, Texas A & M University System.
- Peek, G.J., Thompson, A., Killer, H.M. und Firmin, Richard K.** (2000), Spallation performance of extracorporeal membrane oxygenation tubing. *Perfusion*, Vol. 15 No. 5, pp. 457–466.
- Peek, G.J., Wong, K., Morrison, C., Killer, H.M. und Firmin, R. K.** (1999), Tubing failure during prolonged roller pump use: a laboratory study. *Perfusion*, Vol. 14 No. 6, pp. 443–452.
- Rosenberger, U.** (1989), Peristaltische Schlauchpumpe zum Fördern eines Fluids., No. DE3940730A1.
- Schnedler, W.** (1973), Beitrag zur Untersuchung von Druckschwingungen in Hydraulikleitungen. Dissertation, Universität Karlsruhe, Karlsruhe.
- Stenger, A., Watzke, W. und Ring, H. J.** (1976), Vorrichtung zur Erzeugung eines gleichförmigen Förderstromes., No. DE2608664.
- Vetter, G.** (2006), *Rotierende Verdrängerpumpen für die Prozeßtechnik*, Vulkan-Verlag, Essen.
- Volhard, F. und Fahr, Th** (1914), Die Sklerosen., in *Die Brightsche Nierenkrankheit*, Springer, pp. 208–280.
- Volmer, J.** (1995), *Getriebetechnik: Grundlagen*. 2. Aufl., Verlag Technik, Berlin.
- Wagner, W.** (2009), *Kreiselpumpen und Kreiselpumpenanlagen. Kamprath-Reihe*. 3., überarb. und erw. Aufl., Vogel Business Media, Würzburg.
- Weber, G.** (1849), *Theorie und Methodik der physikalischen Untersuchungsmethode bei den Krankheiten der Athmungs-und Kreislaufs-Organe*.

## Anhang

### A1 Berechnung von $f_i(x)$

Für die Berechnung einer TUF  $f_i(x)$  aus der TUF  $\dot{f}_i(x)$  muss der Phasenanteil  $a_i$  der betreffenden TUF berücksichtigt werden. Dazu wird  $\dot{f}_i(x)$  vor dem Integrieren gemäß des Phasenanteils  $a_i$  auf  $\dot{f}_i(x_a)$  skaliert. Das unbestimmte Integral der TUF  $\dot{f}_i(x_a)$  liefert die TUF  $f_i(x_a)$  welche anschließend wieder auf  $0 \leq x \leq 1$  normiert wird.

Die Berechnung von  $f_i(x)$  ist exemplarisch für die in Abbildung 14 enthaltene TUF  $\dot{f}_2(x)$  der Kammer 1 gezeigt:

Die TUF  $\dot{f}_2(x)$  lautet:

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1$$

(vgl. Abbildung 14)

mit Skalierung von  $x$  auf den Phasenanteil  $a_2 = s_{2,1}$  (gemäß Abbildung 15) folgt  $x = \frac{x_a}{s_{2,1}}$ :

$$\dot{f}_2(x_a) = -\left(3\left(\frac{x_a}{s_{2,1}}\right)^2 - 2\left(\frac{x_a}{s_{2,1}}\right)^3\right) + 1$$

Die Berechnung des unbestimmten Integrals von  $\dot{f}_2(x_a)$  erfolgt durch Substitution mit einer Hilfsvariablen  $u$ .

mit

$$u = \frac{x_a}{s_{2,1}}$$

und

$$du = \frac{1}{s_{2,1}} dx_a$$

folgt nach der Substitution

$$dx_a = s_{2,1} \cdot du$$

$$F(u) = s_{2,1} \int (-3u^2 - 2u^3 + 1) du = s_{2,1} \left( -\left(u^3 - \frac{1}{2}u^4\right) + u \right) + C$$

Aus der anschließenden Rücksubstitution und der Normierung auf  $0 \leq x \leq 1$  durch

$$u = \frac{x_a}{s_{2,1}} = x$$

folgt:

$$f_2(x) = s_{2,1} \left( -\left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + x \right) + C_2$$

Was für  $f_2(x)$  exemplarisch gezeigt wurde lässt sich für alle TUF  $f_i(x)$  verallgemeinern zu:

$$f_i(x) = a_i \int \dot{f}_i(x) dx \quad (1)$$

Bei der Skalierung auf den Phasenanteil  $a_i = \frac{x_a}{x}$  und Substitution mit einer Hilfsvariablen  $u$  gilt stets  $du = \frac{1}{a_i} dx_a$ .

## A2 Berechnung von $\ddot{f}_i(x)$ .

Für die Berechnung einer TÜF  $\ddot{f}_i(x)$  aus der TÜF  $\dot{f}_i(x)$  muss der Phasenanteil  $a_i$  der betreffenden TÜF berücksichtigt werden. Dazu wird  $\dot{f}_i(x)$  vor dem Ableiten gemäß des Phasenanteils  $a_i$  auf  $\dot{f}_i(x_a)$  skaliert. Die partielle Ableitung  $\frac{\partial \dot{f}_i(x_a)}{\partial x_a}$  wird anschließend wieder auf  $0 \leq x \leq 1$  normiert.

Die Berechnung von  $\ddot{f}_i(x)$  ist exemplarisch für die in Abbildung 14 enthaltene TÜF  $\dot{f}_2(x)$  der Kammer 1 gezeigt:

Die TÜF  $\dot{f}_2(x)$  lautet:

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1$$

(vgl. Abbildung 14)

mit Skalierung von  $x$  auf den Phasenanteil  $a_2 = s_{2,1}$  (gemäß Abbildung 15) folgt  $x = \frac{x_a}{s_{2,1}}$ :

$$\dot{f}_2(x_a) = -\left(3\left(\frac{x_a}{s_{2,1}}\right)^2 - 2\left(\frac{x_a}{s_{2,1}}\right)^3\right) + 1$$

Es erfolgt die partielle Differentiation von  $\dot{f}_2(x_a)$  nach der Kettenregel:

$$f'(x_a) = \frac{\partial F(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x_a)}{\partial x_a}$$

mit  $F(u)$  als äußere Funktion und  $u(x_a)$  als innere Funktion von  $f(x_a)$ .

Die äußere Funktion von  $\dot{f}_2(x_a)$  lautet:

$$F(u) = -(3u^2 - 2u^3) + 1$$

mit:

$$\dot{F}(u) = -(6u - 6u^2)$$

Die innere Funktion lautet:

$$u(x_a) = \frac{x_a}{s_{2,1}}$$

mit:

$$\dot{u}(x_a) = \frac{1}{s_{2,1}}$$

gemäß Kettenregel folgt:

$$\ddot{f}_2(x_a) = -\left(6\left(\frac{x_a}{s_{2,1}}\right) - 6\left(\frac{x_a}{s_{2,1}}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{s_{2,1}}$$

aus der anschließenden Normierung von  $x_a$  auf  $x$  mit  $x \cdot s_{2,1} = x_a$  folgt:

$$\ddot{f}_2(x) = -\frac{1}{s_2} (6x - 6x^2)$$

Was für  $\ddot{f}_2(x)$  exemplarisch gezeigt wurde lässt sich verallgemeinern zu:

$$\ddot{f}_i(x) = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{\dot{f}_i(x)}{dx} \quad (2)$$

Für jede TUF  $\dot{f}_i(x)$  entspricht  $\frac{\partial \dot{f}_i(x)}{\partial x}$  der Ableitung der äußeren Funktion  $F(u)$  und  $\frac{1}{a_i}$  der Ableitung  $\frac{\partial u(x_a)}{\partial x_a}$  der inneren Funktion  $u(x_a)$ , da für die Skalierung auf den Phasenanteil  $x = \frac{x_a}{a_i}$  gilt.

### A3 Stetigkeit der Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$ der Kammer 1

Im Folgenden ist am Beispiel der Kammer 1 für den in Abbildung 92 dargestellten Ausschnitt des Phasenplanes gezeigt, dass für  $-1 < f_i(x) < 1$  nach Definition der Integrationskonstanten  $C_i$  über die Bedingung

$$f_i(1) = f_{i+1}(0) \quad (\text{vgl. ( 3 ) Kapitel 4.1.2})$$

die Bedingung

$$f_{i=1}(0) = f_{i=n}(1) \quad (\text{vgl. ( 4 ) Kapitel 4.1.2})$$

ausschließlich dann erfüllt wird wenn alle Phasenanteile  $s_{p,i}$  den Wert Null besitzen.

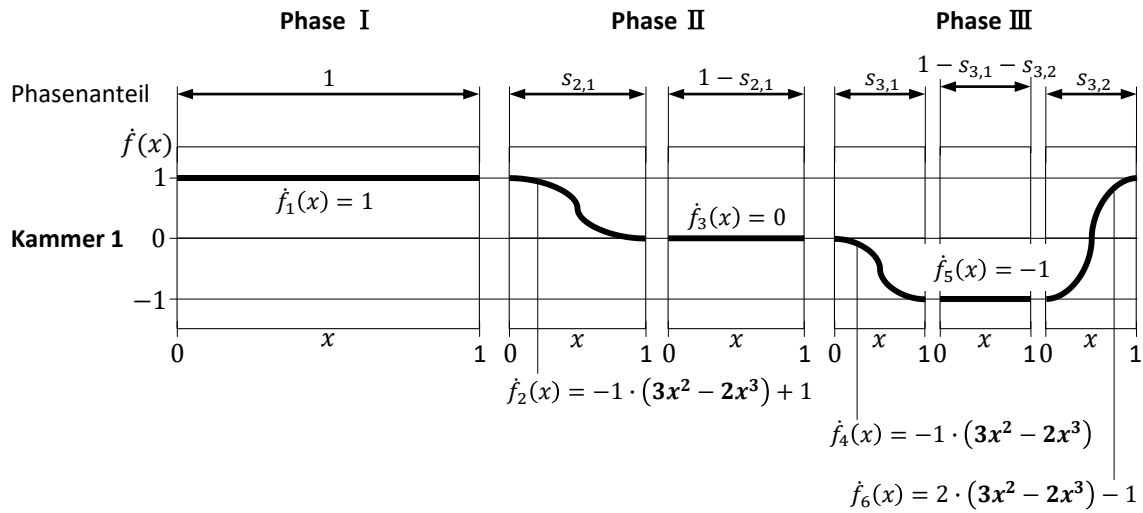


Abbildung 92: Um die Phasenanteile  $s_{p,i}$  erweiterte Darstellung des Phasenplanes von Kammer 1 aus Abbildung 14.

Für die in Abbildung 92 dargestellten Tüf  $\dot{f}_i(x)$  werden zunächst gemäß ( 1 ) die Tüf  $f_i(x)$  berechnet:

$$\dot{f}_1(x) = 1 \quad (33)$$

$$f_1(x) = \int \dot{f}_1(x) dx = x + C_1 \quad (34)$$

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (35)$$

$$f_2(x) = s_{2,1} \cdot \int \dot{f}_2(x) dx = s_{2,1} \cdot \left( \frac{1}{2} x^4 - x^3 + x + C_2 \right) \quad (36)$$

$$\dot{f}_3(x) = 0 \quad (37)$$

$$f_3(x) = (1 - s_{2,1}) \cdot \int \dot{f}_3(x) dx = (1 - s_{2,1}) \cdot C_3 \quad (38)$$

$$\dot{f}_4(x) = -q_1 \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (39)$$

$$f_4(x) = s_{3,1} \cdot \int \dot{f}_4(x) dx = s_{3,1} \cdot \left( \frac{1}{2} x^4 - x^3 + C_4 \right) \quad (40)$$

$$\dot{f}_5(x) = -1 \quad (41)$$



$$f_5(x) = (1 - s_{3,1} - s_{3,2}) \cdot \int \dot{f}_5(x) dx = (1 - s_{3,1} - s_{3,2}) \cdot (-x + C_5) \quad (42)$$

$$\dot{f}_6(x) = 2 \cdot (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (43)$$

$$f_6(x) = s_{3,2} \cdot \int \dot{f}_6(x) dx = s_{3,2} \cdot (2x^3 - x^4 - x + C_6) \quad (44)$$

Die Definition der Integrationskonstanten  $C_i$  erfolgt anhand der mit ( 3 ) beschriebenen Bedingung  $f_i(1) = f_{i+1}(0)$ :

$$f_1(1) = f_2(0):$$

$$1 + C_1 = s_{2,1} \cdot C_2 \quad (45)$$

$$C_2 = \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \quad (46)$$

$$f_2(1) = f_3(0):$$

$$s_{2,1} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \right) = (1 - s_{2,1}) \cdot C_3 \quad (47)$$

$$C_3 = \frac{s_{2,1}}{(1 - s_{2,1})} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{(1 + C_1)}{s_{2,1}} \right) = \frac{s_{2,1}}{2(1 - s_{2,1})} + \frac{1 + C_1}{1 - s_{2,1}} \quad (48)$$

$$f_3(1) = f_4(0):$$

$$\frac{s_{2,1}}{(1 - s_{2,1})} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \right) = s_{3,1} \cdot C_4 \quad (49)$$

$$\frac{s_{2,1}}{2(1 - s_{2,1})} + \frac{1 + C_1}{1 - s_{2,1}} = s_{3,1} \cdot C_4$$

$$C_4 = \frac{s_{2,1}}{(1 - s_{2,1}) \cdot s_{3,1}} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \right) \quad (50)$$

$$C_4 = \frac{1}{s_{3,1}} \cdot \left( \frac{s_{2,1}}{2(1 - s_{2,1})} + \frac{1 + C_1}{1 - s_{2,1}} \right)$$

$$f_4(1) = f_5(0):$$

$$s_{3,1} \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{s_{2,1}}{(1 - s_{2,1}) \cdot s_{3,1}} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \right) \right) \quad (51)$$

$$= (1 - s_{3,1} - s_{3,2}) \cdot C_5$$

$$\frac{s_{2,1}}{2(1 - s_{2,1})} + \frac{1 + C_1}{1 - s_{2,1}} - \frac{s_{3,1}}{2} = (1 - s_{3,1} - s_{3,2}) \cdot C_5$$

$$C_5 = \frac{s_{3,1}}{1 - s_{3,1} - s_{3,2}} \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{s_{2,1}}{(1 - s_{2,1}) \cdot s_{3,1}} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \right) \right) \quad (52)$$

$$C_5 = \frac{1}{1 - s_{3,1} - s_{3,2}} \cdot \left( \frac{s_{2,1}}{2(1 - s_{2,1})} + \frac{1 + C_1}{1 - s_{2,1}} - \frac{s_{3,1}}{2} \right)$$

$$C_5 = \frac{s_{2,1} + 2 + 2C_1 - s_{3,1} + s_{2,1}s_{3,1}}{2(1 - s_{2,1}) \cdot (1 - s_{3,1} - s_{3,2})}$$

$f_5(1) = f_6(0)$ :

$$(1 - s_{3,1} - s_{3,2}) \cdot \left( \frac{s_{3,1}}{1 - s_{3,1} - s_{3,2}} \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{s_{2,1}}{(1 - s_{2,1}) s_{3,1}} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s_{2,1}} \cdot (1 + C_1) \right) \right) - 1 \right) = s_{3,2} \cdot C_6 \quad (53)$$

$$\frac{s_{2,1} + 2 + 2C_1 - s_{3,1} + s_{2,1}s_{3,1}}{2(1 - s_{2,1})} + (s_{3,1} + s_{3,2} - 1) = s_{3,2} \cdot C_6$$

$$C_6 = \frac{2s_{2,1} + 2C_1 + s_{3,1}}{2(1 - s_{2,1})s_{3,2}} + 1$$

Gemäß ( 4 ) muss nun gelten:

$$f_1(0) = f_6(1)$$

Mit

$$f_1(0) = C_1 \quad (54)$$

ist

$$f_6(1) = \frac{2s_{2,1} + 2C_1 + s_{3,1}}{2(1 - s_{2,1})} + s_{3,2} \quad (55)$$

Die Überprüfung der Bedingung

$$\frac{2s_{2,1} + 2C_1 + s_{3,1}}{2(1 - s_{2,1})} + s_{3,2} = C_1$$

erfolgte durch Berechnung von  $f_6(1)$  für diskrete Werte  $0 \leq s_{p,i} \leq 0,9$  mit einem Stützstellenabstand von 0,1 und unter der Randbedingung  $s_{3,1} + s_{3,2} \leq 1$ . Von den daraus resultierenden 640 Parameterkombinationen wurde die Bedingung ausschließlich für  $s_{2,1} = s_{3,1} = s_{3,2} = 0$  erfüllt. Bei den restlichen Parameterkombinationen war  $f_6(1) > f_1(0)$ .

Um  $f_1(0) = f_6(1)$  für beliebige  $0 < s_{p,i} \leq 1$  zu erfüllen zu können, wird daher ein zusätzlicher Freiheitsgrad im Phasenplan benötigt.

**A4 Die Teilübertragungsfunktionen  $\dot{f}_i(x)$** 

Die TüF  $\dot{f}(x)$  des in Abbildung 17 schematisch dargestellten Phasenplanes lauten.

**Kammer 1**

Phase I

$$\dot{f}_1(x) = 1 \quad (56)$$

Phase II

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (57)$$

$$\dot{f}_3(x) = 0 \quad (58)$$

Phase III

$$\dot{f}_4(x) = -q_1 \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (59)$$

$$\dot{f}_5(x) = -q_1 \quad (60)$$

$$\dot{f}_6(x) = (1 + q_1) \cdot (3x^2 - 2x^3) - q_1 \quad (61)$$

**Kammer 2**

Phase I (Kammer geschlossen)

$$\dot{f}_1(x) = 0 \quad (62)$$

Phase II

$$\dot{f}_2(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad (63)$$

$$\dot{f}_3(x) = 1 \quad (64)$$

Phase III

$$\dot{f}_4(x) = -1 \cdot (1 + q_2) \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (65)$$

$$\dot{f}_5(x) = -q_2 \quad (66)$$

$$\dot{f}_6(x) = q_2 \cdot (3x^2 - 2x^3) - q_2 \quad (67)$$

**Kammer 3**

Phase I

$$\dot{f}_1(x) = -1 \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (68)$$

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (1 + q_1 + q_2) \quad (69)$$

$$\dot{f}_3(x) = (1 + q_1 + q_2) \cdot (3x^2 - 2x^3) - (1 + q_1 + q_2) \quad (70)$$

Phase II (Kammer geschlossen)

$$\dot{f}_4(x) = 0 \quad (71)$$

Phase III

$$\dot{f}_5(x) = (1 + q_1 + q_2) \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (72)$$

$$\dot{f}_6(x) = 1 + q_1 + q_2 \quad (73)$$

$$\dot{f}_7(x) = -1 \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot (3x^2 - 2x^3) + (1 + q_1 + q_2) \quad (74)$$

#### Kammer 4

Phase I

$$\dot{f}_1(x) = q_2 \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (75)$$

$$\dot{f}_2(x) = q_2 \quad (76)$$

$$\dot{f}_3(x) = -1 \cdot (1 + q_2) \cdot (3x^2 - 2x^3) + q_2 \quad (77)$$

Phase II

$$\dot{f}_4(x) = -1 \quad (78)$$

$$\dot{f}_5(x) = (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (79)$$

Phase III (Kammer geschlossen)

$$\dot{f}_6(x) = 0 \quad (80)$$

#### Kammer 5

Phase I

$$\dot{f}_1(x) = (1 + q_1) \cdot (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (81)$$

$$\dot{f}_2(x) = q_1 \quad (82)$$

$$\dot{f}_3(x) = -q_1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + q_1 \quad (83)$$

Phase II

$$\dot{f}_4(x) = 0 \quad (84)$$

$$\dot{f}_5(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (85)$$

Phase III

$$\dot{f}_6(x) = -1 \quad (86)$$

## A5 Die Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$

Für die in A4 aufgestellten TUF  $\hat{f}_i(x)$  sind im Folgenden die gemäß ( 1 ) berechneten TUF  $f_i(x)$  aufgelistet:

### Kammer 1

$$f_1(x) = x + C_1 \quad (87)$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x \right) + C_2 \quad (88)$$

$$f_3(x) = C_3 \quad (89)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot (-q_1) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + C_4 \quad (90)$$

$$f_5(x) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_1 \cdot x) + C_5 \quad (91)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot \left( (1 + q_1) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - q_1 \cdot x \right) + C_6 \quad (92)$$

### Kammer 2

Kammer geschlossen:  $f_1(x) = C_1 = 0 \quad (93)$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + C_2 \quad (94)$$

$$f_3(x) = (1 - s_2) \cdot x + C_3 \quad (95)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left( -(1 + q_2) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + x \right) + C_4 \quad (96)$$

$$f_5(x) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_2) \cdot x + C_5 \quad (97)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot q_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + C_6 \quad (98)$$

### Kammer 3

$$f_1(x) = -s_3 \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + C_1 \quad (99)$$

$$f_2(x) = -(1 - 2s_3) \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot x + C_2 \quad (100)$$

$$f_3(x) = s_3 \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + C_3 \quad (101)$$

Kammer geschlossen:  $f_4(x) = C_4 = 0 \quad (102)$

$$f_5(x) = s_3 \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + C_5 \quad (103)$$

$$f_6(x) = (1 - 2s_3) \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot x + C_6 \quad (104)$$

$$f_7(x) = -s_3 \cdot (1 + q_1 + q_2) \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + C_7 \quad (105)$$

Kammer 4

$$f_1(x) = s_3 \cdot q_2 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + C_1 \quad (106)$$

$$f_2(x) = (1 - 2s_3) \cdot q_2 \cdot x + C_2 \quad (107)$$

$$f_3(x) = s_3 \cdot \left(-(1 + q_2) \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + q_2 \cdot x\right) + C_3 \quad (108)$$

$$f_4(x) = -(1 - s_2) \cdot x + C_4 \quad (109)$$

$$f_5(x) = s_2 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + C_5 \quad (110)$$

$$\text{Kammer geschlossen:} \quad f_6(x) = C_6 = 0 \quad (111)$$

Kammer 5

$$f_1(x) = s_3 \cdot \left((1 + q_1) \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) - x\right) + C_1 \quad (112)$$

$$f_2(x) = (1 - 2s_3) \cdot q_1 \cdot x + C_2 \quad (113)$$

$$f_3(x) = s_3 \cdot \left(-q_1 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + q_1 \cdot x\right) + C_3 \quad (114)$$

$$f_4(x) = C_4 \quad (115)$$

$$f_5(x) = -s_2 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + C_5 \quad (116)$$

$$f_6(x) = -x + C_6 \quad (117)$$

## A6 Berechnung von $q_1$ und $q_2$

Mit ( 3 ) und ( 4 ) lassen sich die in den TUF  $\dot{f}_i(x)$  (siehe A5) enthaltenen Parameter  $q_1$  und  $q_2$  in Abhängigkeit von  $s_2$  und  $s_3$  beschreiben.

### Kammer 1:

gemäß ( 3 ) muss gelten  $f_i(1) = f_{i+1}(0)$ :

$$f_1(x) = x + C_1 \quad (\text{gemäß ( 87 ) in A5})$$

$$f_1(0) = C_1 \quad (118)$$

$$f_1(1) = 1 + C_1 \quad (119)$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x \right) + C_2 \quad (\text{gemäß ( 88 ) in A5})$$

$$f_2(0) = C_2 = f_1(1) = 1 + C_1 \quad (120)$$

$$C_2 = 1 + C_1 \quad (121)$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x \right) + 1 + C_1 \quad (122)$$

$$f_2(1) = s_2 \cdot \left( \frac{1}{2} - 1 + 1 \right) + 1 + C_1 = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (123)$$

$$f_3(x) = C_3 \quad (\text{gemäß ( 89 ) in A5})$$

$$f_3(0) = f_3(1) = C_3 = f_2(1) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (124)$$

$$f_3(x) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (125)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left( -q_1 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right) + C_4 \quad (\text{gemäß ( 90 ) in A5})$$

$$f_4(0) = s_3 \cdot (-q_1 \cdot 0) + C_4 = f_3(1) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (126)$$

$$C_4 = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (127)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left( -q_1 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (128)$$

$$f_4(1) = s_3 \cdot \left( -\frac{q_1}{2} \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 = C_1 + 1 + \frac{1}{2}(s_2 - q_1 s_3) \quad (129)$$

$$f_5(x) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_1 \cdot x) + C_5 \quad (\text{gemäß ( 91 ) in A5})$$

$$f_5(0) = C_5 = f_4(1) = C_1 + 1 + \frac{1}{2}(s_2 - q_1 s_3) \quad (130)$$

$$C_5 = C_1 + 1 + \frac{1}{2}(s_2 - q_1 s_3) \quad (131)$$

$$f_5(x) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_1 \cdot x) + C_1 + 1 + \frac{1}{2}(s_2 - q_1 s_3) \quad (132)$$

$$f_5(1) = -(1 - 2s_3) \cdot q_1 + C_1 + 1 + \frac{1}{2}(s_2 - q_1s_3) = C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 - q_1 + \frac{3}{2}q_1s_3 \quad (133)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot \left( (1 + q_1) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - q_1 \cdot x \right) + C_6 \quad (\text{gemäß (92) in A5})$$

$$f_6(0) = C_6 = f_5(1) = C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 - q_1 + \frac{3}{2}q_1s_3 \quad (134)$$

$$C_6 = C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 - q_1 + \frac{3}{2}q_1s_3 \quad (135)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot \left( (1 + q_1) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - q_1 \cdot x \right) + C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 - q_1 + \frac{3}{2}q_1s_3 \quad (136)$$

$$\begin{aligned} f_6(1) &= s_3 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_1 \right) + C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 - q_1 + \frac{3}{2}q_1s_3 \\ &= C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 + q_1(s_3 - 1) \end{aligned} \quad (137)$$

gemäß (4) muss gelten  $f_1(0) = f_6(1)$ :

$$f_1(0) = f_6(1) = C_1 = C_1 + 1 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 + q_1(s_3 - 1) \quad (138)$$

für  $q_1$  folgt daraus:

$$q_1 = \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (139)$$

## Kammer 2

gemäß (3) muss gelten  $f_i(1) = f_{i+1}(0)$ :

$$f_1(x) = C_1 = 0 \text{ (Kammer geschlossen)} \quad (\text{gemäß (93) in A5})$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + C_2 \quad (\text{gemäß (94) in A5})$$

$$f_2(0) = C_2 = f_1(1) = 0 \quad (140)$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \quad (141)$$

$$f_2(1) = s_2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right) \quad (142)$$

$$f_3(x) = (1 - s_2) \cdot x + C_3 \quad (\text{gemäß (95) in A5})$$

$$f_3(0) = C_3 = f_2(1) = \frac{s_2}{2} \quad (143)$$

$$C_3 = \frac{s_2}{2} \quad (144)$$

$$f_3(x) = (1 - s_2) \cdot x + \frac{s_2}{2} \quad (145)$$



$$f_3(1) = 1 - \frac{s_2}{2} \quad (146)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left( -(1 + q_2) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + x \right) + C_4 \quad (\text{gemäß (96) in A5})$$

$$f_4(0) = C_4 = f_3(1) = 1 - \frac{s_2}{2} \quad (147)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left( -(1 + q_2) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + x \right) + 1 - \frac{s_2}{2} \quad (148)$$

$$f_4(1) = s_3 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot (1 + q_2) + 1 \right) + 1 - \frac{s_2}{2} = \frac{s_3}{2}(1 - q_2) - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (149)$$

$$f_5(x) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_2 \cdot x) + C_5 \quad (\text{gemäß (97) in A5})$$

$$f_5(0) = C_5 = f_4(1) = \frac{s_3}{2}(1 - q_2) - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (150)$$

$$C_5 = \frac{s_3}{2}(1 - q_2) - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (151)$$

$$f_5(x) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_2 \cdot x) + \frac{s_3}{2}(1 - q_2) - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (152)$$

$$f_5(1) = (1 - 2s_3) \cdot (-q_2) + \frac{s_3}{2}(1 - q_2) - \frac{s_2}{2} + 1 = \frac{3}{2}s_3q_2 - q_2 + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (153)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot \left( q_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) \right) + C_6 \quad (\text{gemäß (98) in A5})$$

$$f_6(0) = C_6 = f_5(1) = \frac{3}{2}s_3q_2 - q_2 + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (154)$$

$$C_6 = \frac{3}{2}s_3q_2 - q_2 + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (155)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot q_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{3}{2}s_3q_2 - q_2 + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (156)$$

$$f_6(1) = s_3 \cdot \left( -\frac{1}{2}q_2 \right) + \frac{3}{2}s_3q_2 - q_2 + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 = q_2(s_3 - 1) + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (157)$$

gemäß (4) muss gelten  $f_1(0) = f_6(1)$ :

$$f_1(0) = 0 = f_6(1) = q_2(s_3 - 1) + \frac{s_3}{2} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (158)$$

daraus folgt für  $q_2$ :

$$q_2 = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (159)$$

## A7 Berechnung des maximalen Arbeitsvolumens von Kammer 1 und 2

Bei den TUF  $\dot{f}_i(x)$  handelt es sich um Polynome dritten Grades, welche drei Nullstellen besitzen. In diesem Fall relevant ist ausschließlich die Nullstelle im Intervall  $0 \leq x \leq 1$ . Die Nullstellen der Polynome wurden mit Matlab (root[Polynom]) berechnet.

Tabelle 5: Für die Abbildung 21 berechnetes maximales Arbeitsvolumen der Kammer 1. Die dafür benötigten TUF sind dem Anhang A9 zu entnehmen.

$s_2$	$s_3$	Nullstelle $x_0$ von $\dot{f}_6(x)$	$C_1$ berechnet aus $f_6(x_0) = 0$	maximales Arbeitsvolumen der Kammer $f_3(x) = \text{konstant}$
0	0	0,5	0	1
0	0,1	0,52566356	0,029794385	1,029794385
0	0,2	0,55282816	0,056457428	1,056457428
0	0,3	0,58181117	0,079596351	1,079596351
0	0,4	0,61303686	0,09870573	1,09870573
0	0,5	0,64710127	0,11310928	1,11310928
0,5	0	0,53710515	0	1,25
0,5	0,1	0,56090732	0,027758399	1,277758399
0,5	0,2	0,58612304	0,052555069	1,302555069
0,5	0,3	0,61303686	0,074029297	1,324029297
0,5	0,4	0,64203165	0,091718069	1,341718069
0,5	0,5	0,67364818	0,105002799	1,355002799
1	0	0,56706892	0	1,5
1	0,1	0,58938767	0,026084421	1,526084421
1	0,2	0,61303686	0,049352865	1,549352865
1	0,3	0,63827701	0,069470879	1,569470879
1	0,4	0,66546003	0,086009721	1,586009721
1	0,5	0,69508455	0,098396961	1,598396961

Tabelle 6: Für die Abbildung 21 berechnetes maximales Arbeitsvolumen der Kammer 2. Die dafür benötigten TÜF sind dem Anhang A9 zu entnehmen.

$s_2$	$s_3$	Nullstelle $x_0$ von $\dot{f}_4(x)$	maximales Arbeitsvolumen der Kammer bei $f_4(x_0)$
0	0	0,5	1
0	0,1	0,52566356	1,029794385
0	0,2	0,55282816	1,056457428
0	0,3	0,58181117	1,079596351
0	0,4	0,61303686	1,09870573
0	0,5	0,64710127	1,11310928
0,5	0	0,53710515	1,25
0,5	0,1	0,56090732	1,277758399
0,5	0,2	0,58612304	1,302555069
0,5	0,3	0,61303686	1,324029297
0,5	0,4	0,64203165	1,341718069
0,5	0,5	0,67364818	1,355002799
1	0	0,56706892	1,5
1	0,1	0,58938767	1,526084421
1	0,2	0,61303686	1,549352865
1	0,3	0,63827701	1,569470879
1	0,4	0,66546003	1,586009721
1	0,5	0,69508455	1,598396961

Tabelle 7: Für die Abbildung 22 berechnetes maximales Arbeitsvolumen der Kammer 1. Die dafür benötigten TUF sind dem Anhang A9 zu entnehmen.

$s_2$	$s_3$	Nullstelle $x_0$ von $\dot{f}_6(x)$	$C_1$ berechnet aus $f_6(x_0) = 0$	maximales Arbeitsvolumen der Kammer $f_3(x) = \text{konstant}$
0,0	0,00	0,5	0	1
0,1	0,05	0,52058777	0,015042076	1,065042076
0,2	0,10	0,54074057	0,02892844	1,12892844
0,3	0,15	0,56053676	0,041670024	1,191670024
0,4	0,20	0,580049	0,053272003	1,253272003
0,5	0,25	0,59934658	0,063733551	1,313733551
0,6	0,30	0,61849761	0,073047362	1,373047362
0,7	0,35	0,63757115	0,081198875	1,431198875
0,8	0,40	0,65663955	0,088165116	1,488165116
0,9	0,45	0,6757813	0,093913018	1,543913018
1,0	0,50	0,69508455	0,098396961	1,598396961

Tabelle 8: Für die Abbildung 22 berechnetes maximales Arbeitsvolumen der Kammer 2. Die dafür benötigten TUF sind dem Anhang A9 zu entnehmen.

$s_2$	$s_3$	Nullstelle $x_0$ von $\dot{f}_4(x)$	maximales Arbeitsvolumen der Kammer bei $f_4(x_0)$
0	0	0,5	1
0,1	0,05	0,495670888	0,965503069
0,2	0,1	0,490990016	0,93074168
0,3	0,15	0,485911765	0,8956808
0,4	0,2	0,48038209	0,86027883
0,5	0,25	0,474336438	0,824485961
0,6	0,3	0,467696992	0,788242008
0,7	0,35	0,460368984	0,751473501
0,8	0,4	0,452235658	0,714089716
0,9	0,45	0,443151263	0,67597715
1	0,5	0,432931077	0,636991661

## A8 Die Teilübertragungsfunktionen $\ddot{f}_i(x)$ und deren Extremwerte

Im Folgenden sind die gemäß ( 2 ) berechneten TUF  $\ddot{f}_i(x)$  aufgeführt. Da alle Übergangsfunktionen  $\dot{f}_i(x) \neq \text{konst.}$  auf der kubischen Parabel  $3x^2 - 2x^3$  basieren, besitzen die davon abgeleiteten TUF  $\ddot{f}_i(x)$  für  $0 \leq x \leq 1$  ihren Extremwert bei  $x = 0,5$  (vgl. Abbildung 13, Kapitel 4.1.1).

### Kammer 1:

$$\dot{f}_1(x) = 1 \quad (160)$$

$$\ddot{f}_1(x) = 0 \quad (161)$$

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (162)$$

$$\ddot{f}_2(x) = -\frac{1}{s_2}(6x - 6x^2) \quad (163)$$

$$\ddot{f}_{2,max} = \ddot{f}_2(0,5) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2} \quad (164)$$

$$\dot{f}_3(x) = 0 \quad (165)$$

$$\ddot{f}_3(x) = 0 \quad (166)$$

$$\dot{f}_4(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (167)$$

$$\ddot{f}_4(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (168)$$

$$\ddot{f}_{4,max} = \ddot{f}_4(0,5) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{s_3 - s_3^2} \quad (169)$$

$$\dot{f}_5(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (170)$$

$$\ddot{f}_5(x) = 0 \quad (171)$$

$$\dot{f}_6(x) = \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) - \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (172)$$

$$\ddot{f}_6(x) = \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (173)$$

$$\ddot{f}_{6,max} = \ddot{f}_6(0,5) = \frac{3}{4} \cdot \frac{s_2 - s_3 + 4}{s_3 - s_3^2} \quad (174)$$

**Kammer 2:**

$$\dot{f}_1(x) = 0 \quad (175)$$

$$\ddot{f}_1(x) = 0 \quad (176)$$

$$\dot{f}_2(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad (177)$$

$$\ddot{f}_2(x) = \frac{1}{s_2} (6x - 6x^2) \quad (178)$$

$$\ddot{f}_{2,max} = \ddot{f}_2(0,5) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2} \quad (179)$$

$$\dot{f}_3(x) = 1 \quad (180)$$

$$\ddot{f}_3(x) = 0 \quad (181)$$

$$\dot{f}_4(x) = -1 \cdot \frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (182)$$

$$\ddot{f}_4(x) = -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (183)$$

$$\ddot{f}_{4,max} = \ddot{f}_4(0,5) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4 - s_2 - s_3}{s_3 - s_3^2} \quad (184)$$

$$\dot{f}_5(x) = -\frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (185)$$

$$\ddot{f}_5(x) = 0 \quad (186)$$

$$\dot{f}_6(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) - \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (187)$$

$$\ddot{f}_6(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (188)$$

$$\ddot{f}_{6,max} = \ddot{f}_6(0,5) = \frac{3}{4} \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{s_3 - s_3^2} \quad (189)$$

**Kammer 3**

$$\dot{f}_1(x) = -1 \cdot \frac{3}{1-s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (190)$$

$$\ddot{f}_1(x) = -\frac{1}{s_3} \cdot \frac{3}{1-s_3} \cdot (6x - 6x^2) \quad (191)$$

$$\ddot{f}_{1,max} = \ddot{f}_1(0,5) = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s_3 - s_3^2} \quad (192)$$

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot \frac{3}{1-s_3} \quad (193)$$

$$\ddot{f}_2(x) = 0 \quad (194)$$

$$\dot{f}_3(x) = \frac{3}{1-s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3) - \frac{3}{1-s_3} \quad (195)$$

$$\ddot{f}_3(x) = \frac{1}{s_3} \cdot \frac{3}{1-s_3} \cdot (6x - 6x^2) \quad (196)$$

$$\ddot{f}_{3,max} = \ddot{f}_3(0,5) = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s_3 - s_3^2} \quad (197)$$

$$\dot{f}_4(x) = 0 \quad (198)$$

$$\ddot{f}_4(x) = 0 \quad (199)$$

$$\dot{f}_5(x) = \frac{3}{1-s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (200)$$

$$\ddot{f}_5(x) = \frac{1}{s_3} \cdot \frac{3}{1-s_3} \cdot (6x - 6x^2) \quad (201)$$

$$\ddot{f}_{5,max} = \ddot{f}_5(0,5) = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s_3 - s_3^2} \quad (202)$$

$$\dot{f}_6(x) = \frac{3}{1-s_3} \quad (203)$$

$$\ddot{f}_6(x) = 0 \quad (204)$$

$$\dot{f}_7(x) = -1 \cdot \frac{3}{1-s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3) + \frac{3}{1-s_3} \quad (205)$$

$$\ddot{f}_7(x) = -\frac{1}{s_3} \cdot \frac{3}{1-s_3} \cdot (6x - 6x^2) \quad (206)$$

$$\ddot{f}_{7,max} = \ddot{f}_7(0,5) = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s_3 - s_3^2} \quad (207)$$

**Kammer 4:**

$$\dot{f}_1(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (208)$$

$$\ddot{f}_1(x) = \frac{1}{s_3} \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (209)$$

$$\ddot{f}_{1,max} = \ddot{f}_1(0,5) = \frac{3}{4} \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{s_3 - s_3^2} \quad (210)$$

$$\dot{f}_2(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (211)$$

$$\ddot{f}_2(x) = 0 \quad (212)$$

$$\dot{f}_3(x) = -1 \cdot \frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) + \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (213)$$

$$\ddot{f}_3(x) = -\frac{1}{s_3} \cdot \frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (214)$$

$$\ddot{f}_{3,max} = \ddot{f}_3(0,5) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4 - s_2 - s_3}{s_3 - s_3^2} \quad (215)$$

$$\dot{f}_4(x) = -1 \quad (216)$$

$$\ddot{f}_4(x) = 0 \quad (217)$$

$$\dot{f}_5(x) = (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (218)$$

$$\ddot{f}_5(x) = \frac{1}{s_2} (6x - 6x^2) \quad (219)$$

$$\ddot{f}_{5,max} = \ddot{f}_5(0,5) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2} \quad (220)$$

$$\dot{f}_6(x) = 0 \quad (221)$$

$$\ddot{f}_6(x) = 0 \quad (222)$$



**Kammer 5**

$$\dot{f}_1(x) = \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (223)$$

$$\ddot{f}_1(x) = \frac{1}{s_3} \cdot \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1 - s_3)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (224)$$

$$\ddot{f}_{1,max} = \ddot{f}_1(0,5) = \frac{3}{4} \cdot \frac{s_2 - s_3 + 4}{s_3 - s_3^2} \quad (225)$$

$$\dot{f}_2(x) = \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (226)$$

$$\ddot{f}_2(x) = 0 \quad (227)$$

$$\dot{f}_3(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) + \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \quad (228)$$

$$\ddot{f}_3(x) = -\frac{1}{s_3} \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (229)$$

$$\ddot{f}_{3,max} = \ddot{f}_3(0,5) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{s_3 - s_3^2} \quad (230)$$

$$\dot{f}_4(x) = 0 \quad (231)$$

$$\ddot{f}_4(x) = 0 \quad (232)$$

$$\dot{f}_5(x) = -1(3x^2 - 2x^3) \quad (233)$$

$$\ddot{f}_5(x) = -\frac{1}{s_2}(6x - 6x^2) \quad (234)$$

$$\ddot{f}_{5,max} = \ddot{f}_5(0,5) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2} \quad (235)$$

$$\dot{f}_6(x) = -1 \quad (236)$$

$$\ddot{f}_6(x) = 0 \quad (237)$$

## A9 Übersicht der Teilübertragungsfunktionen $f_i(x)$ , $\dot{f}_i(x)$ und $\ddot{f}_i(x)$

Die Parameter  $q_1$  und  $q_2$  wurden in den TUF gemäß ( 5 ), ( 6 ) und ( 7 ) durch Funktionen von  $s_2$  und  $s_3$  ersetzt.

### Kammer 1

$$f_1(x) = x + C_1 \quad (238)$$

$$\dot{f}_1(x) = 1 \quad (239)$$

$$\ddot{f}_1(x) = 0 \quad (240)$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x \right) + 1 + C_1 \quad (241)$$

$$\dot{f}_2(x) = -1 \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (242)$$

$$\ddot{f}_2(x) = -\frac{1}{s_2} (6x - 6x^2) \quad (243)$$

$$f_3(x) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (244)$$

$$\dot{f}_3(x) = 0 \quad (245)$$

$$\ddot{f}_3(x) = 0 \quad (246)$$

$$f_4(x) = -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2 \cdot (1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (247)$$

$$\dot{f}_4(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2 \cdot (1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (248)$$

$$\ddot{f}_4(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2 \cdot (s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (249)$$

$$f_5(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2 \cdot (1 - s_3)} \cdot (1 - 2s_3) \cdot x - s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{4(1 - s_3)} + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (250)$$

$$\dot{f}_5(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2 \cdot (1 - s_3)} \quad (251)$$

$$\ddot{f}_5(x) = 0 \quad (252)$$

$$f_6(x) = \frac{s_3 s_2 - s_3^2 + 4s_3}{2(1-s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) - \frac{s_3^2 + s_3 s_2 + 2s_3}{2(1-s_3)} \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3 s_2}{4(1-s_3)} + C_1 \quad (253)$$

$$\dot{f}_6(x) = \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1-s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) - \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1-s_3)} \quad (254)$$

$$\ddot{f}_6(x) = \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (255)$$

**Kammer 2**

$$f_1(x) = 0 \quad (256)$$

$$\dot{f}_1(x) = 0 \quad (257)$$

$$\ddot{f}_1(x) = 0 \quad (258)$$

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) \quad (259)$$

$$\dot{f}_2(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad (260)$$

$$\ddot{f}_2(x) = \frac{1}{s_2} (6x - 6x^2) \quad (261)$$

$$f_3(x) = (1 - s_2) \cdot x + \frac{s_2}{2} \quad (262)$$

$$\dot{f}_3(x) = 1 \quad (263)$$

$$\ddot{f}_3(x) = 0 \quad (264)$$

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left(-\frac{4 - s_2 - s_3}{2(1-s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + x\right) - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (265)$$

$$\dot{f}_4(x) = -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(1-s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) + 1 \quad (266)$$

$$\ddot{f}_4(x) = -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (267)$$

$$f_5(x) = -\frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot (1 - 2s_3) \cdot x + s_3 \cdot \frac{s_2 - 3s_3}{4(1-s_3)} - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (268)$$

$$\dot{f}_5(x) = -\frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \quad (269)$$

$$\ddot{f}_5(x) = 0 \quad (270)$$

$$f_6(x) = s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + \frac{s_3^2 - s_3s_2 + 2s_3}{4(1 - s_3)} \quad (271)$$

$$\dot{f}_6(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3 - 1) \quad (272)$$

$$\ddot{f}_6(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (273)$$

**Kammer 3**

$$f_1(x) = -\frac{3s_3}{1 - s_3} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + 3 \quad (274)$$

$$\dot{f}_1(x) = -\frac{3}{1 - s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (275)$$

$$\ddot{f}_1(x) = -\frac{3}{s_3 - s_3^2} \cdot (6x - 6x^2) \quad (276)$$

$$f_2(x) = -3 \frac{1 - 2s_3}{1 - s_3} \cdot x + \frac{6 - 9s_3}{2(1 - s_3)} \quad (277)$$

$$\dot{f}_2(x) = -\frac{3}{1 - s_3} \quad (278)$$

$$\ddot{f}_2(x) = 0 \quad (279)$$

$$f_3(x) = \frac{3s_3}{1 - s_3} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + \frac{3s_3}{2(1 - s_3)} \quad (280)$$

$$\dot{f}_3(x) = \frac{3}{1 - s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3 - 1) \quad (281)$$

$$\ddot{f}_3(x) = \frac{3}{s_3 - s_3^2} \cdot (6x - 6x^2) \quad (282)$$

$$f_4(x) = 0 \quad (283)$$

$$\dot{f}_4(x) = 0 \quad (284)$$

$$\ddot{f}_4(x) = 0 \quad (285)$$

$$f_5(x) = \frac{3s_3}{1 - s_3} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) \quad (286)$$

$$\dot{f}_5(x) = \frac{3}{1-s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (287)$$

$$\ddot{f}_5(x) = \frac{3}{s_3 - s_3^2} \cdot (6x - 6x^2) \quad (288)$$

$$f_6(x) = 3 \cdot \frac{1-2s_3}{1-s_3} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot \frac{s_3}{(1-s_3)} \quad (289)$$

$$\dot{f}_6(x) = \frac{3}{1-s_3} \quad (290)$$

$$\ddot{f}_6(x) = 0 \quad (291)$$

$$f_7(x) = -\frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + \left(1 - \frac{3}{2}s_3\right) \cdot \frac{3}{1-s_3} \quad (292)$$

$$\dot{f}_7(x) = -\frac{3}{1-s_3} \cdot (3x^2 - 2x^3 - 1) \quad (293)$$

$$\ddot{f}_7(x) = -\frac{3}{s_3 - s_3^2} \cdot (6x - 6x^2) \quad (294)$$

**Kammer 4**

$$f_1(x) = s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) \quad (295)$$

$$\dot{f}_1(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) \quad (296)$$

$$\ddot{f}_1(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (297)$$

$$f_2(x) = \frac{1-2s_3}{2(1-s_3)} \cdot (s_3 - s_2 + 2) \cdot x + s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{4(1-s_3)} \quad (298)$$

$$\dot{f}_2(x) = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \quad (299)$$

$$\ddot{f}_2(x) = 0 \quad (300)$$

$$f_3(x) = s_3 \cdot \left(-\frac{4-s_2-s_3}{2(1-s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot x\right) + \left(1 - \frac{3}{2}s_3\right) \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \quad (301)$$

$$\dot{f}_3(x) = -\frac{4-s_2-s_3}{2(1-s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) + \frac{s_3 - s_2 + 2}{2 \cdot (1-s_3)} \quad (302)$$

$$\ddot{f}_3(x) = -\frac{4-s_2-s_3}{2(s_3-s_3^2)} \cdot (6x-6x^2) \quad (303)$$

$$f_4(x) = (s_2-1) \cdot x - \frac{s_2}{2} + 1 \quad (304)$$

$$\dot{f}_4(x) = -1 \quad (305)$$

$$\ddot{f}_4(x) = 0 \quad (306)$$

$$f_5(x) = s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{2} \right) \quad (307)$$

$$\dot{f}_5(x) = (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (308)$$

$$\ddot{f}_5(x) = \frac{1}{s_2} \cdot (6x - 6x^2) \quad (309)$$

$$f_6(x) = 0 \quad (310)$$

$$\dot{f}_6(x) = 0 \quad (311)$$

$$\ddot{f}_6(x) = 0 \quad (312)$$

**Kammer 5**

$$f_1(x) = s_3 \cdot \left( \frac{s_2-s_3+4}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - x \right) + C_1 \quad (313)$$

$$\dot{f}_1(x) = \frac{s_2-s_3+4}{2(1-s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3) - 1 \quad (314)$$

$$\ddot{f}_1(x) = \frac{s_2-s_3+4}{2(s_3-s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (315)$$

$$f_2(x) = \frac{1-2s_3}{2-2s_3} \cdot (s_3+s_2+2) \cdot x + \frac{3s_3^2+s_3s_2}{4(1-s_3)} + C_1 \quad (316)$$

$$\dot{f}_2(x) = \frac{s_3+s_2+2}{2(1-s_3)} \quad (317)$$

$$\ddot{f}_2(x) = 0 \quad (318)$$

$$f_3(x) = -s_3 \cdot \frac{s_3+s_2+2}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{2s_2+4-3s_3s_2-6s_3-s_3^2}{4(1-s_3)} + C_1 \quad (319)$$

$$\dot{f}_3(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (3x^2 - 2x^3 - 1) \quad (320)$$

$$\ddot{f}_3(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(s_3 - s_3^2)} \cdot (6x - 6x^2) \quad (321)$$

$$f_4(x) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (322)$$

$$\dot{f}_4(x) = 0 \quad (323)$$

$$\ddot{f}_4(x) = 0 \quad (324)$$

$$f_5(x) = -s_2 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \quad (325)$$

$$\dot{f}_5(x) = -(3x^2 - 2x^3) \quad (326)$$

$$\ddot{f}_5(x) = -\frac{1}{s_2} \cdot (6x - 6x^2) \quad (327)$$

$$f_6(x) = -x + 1 + C_1 \quad (328)$$

$$\dot{f}_6(x) = -1 \quad (329)$$

$$\ddot{f}_6(x) = 0 \quad (330)$$

**A10 Optimum des Parameters  $s_2$** 

Das Optimum des Parameters  $s_2$  liegt dann vor, wenn für Kammer 1 gemäß ( 12 ) gilt:

$$|\ddot{f}_{2,max}| = |\ddot{f}_{6,max}|$$

Mit

$$\ddot{f}_{2,max} = \ddot{f}_2(0,5) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2}$$

(gemäß ( 164 ), A7)

und

$$\ddot{f}_{6,max} = \ddot{f}_6(0,5) = \frac{3}{4} \cdot \frac{s_2 - s_3 + 4}{s_3 - s_3^2}$$

(gemäß ( 174 ), A7)

folgt aus ( 12 )

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{s_2 - s_3 + 4}{s_3 - s_3^2}$$

( 331 )

$$s_2 = \frac{s_3}{2} - 2 + \sqrt{4 - 1,75s_3^2}$$



## A11 Herleitung des vom Stößelweg abhängigen Kammervolumens

Die Herleitung erfolgt auf Basis der in Abbildung 28 idealisiert dargestellte Verformung des Schlauchquerschnittes und unter Verwendung der in dieser Abbildung definierten Formelzeichen:

$A_{Schlauch}$  – Querschnittsfläche der Schlauchwand

$A_{Lumen}$  – lichter Innenquerschnitt

$NF$  – neutrale Faser

$d_a$  – Außendurchmesser unverformter Schlauch

$d_i$  – Innendurchmesser unverformter Schlauch

$y$  – Stößelweg

$e(y)$  – Abstand zwischen Stößel und Platte

$l(y)$  – vertikale lichte Höhe des Lumen

$b(y)$  – Breite der Anlagefläche

Das in einem Schlauchabschnitt enthaltene Volumen berechnet sich allgemein über:

$$V_{Kammer} = A_{Lumen} \cdot L_{Stößel} \quad (332)$$

$A_{Lumen}$  – lichter Schlauchinnenquerschnitt

$L_{Stößel}$  – Stößellänge

Daraus folgt für einen unverformten zylindrischen Schlauchabschnitt mit dem Innendurchmesser  $d_i$ :

$$V_{Kammer} = \frac{\pi}{4} \cdot d_i^2 \cdot L_{Stößel} \quad (333)$$

Da sich  $L_{Stößel}$  während des Zusammendrückens des Schlauches nicht verändert und lediglich als Skalierungsfaktor der Kammergröße fungiert, ist für die Beschreibung der Verdrängungscharakteristik ausschließlich die Änderung des Lumen (lichter Schlauchinnenquerschnitt) ausschlaggebend. Wie der Abbildung 28 zu entnehmen, lassen sich die Fläche des Lumen und die Querschnittsfläche des Schlauchmaterials wie folgt berechnen:

$$A_{Lumen} = \frac{\pi}{4} (l(y))^2 + b(y) \cdot l(y) \quad (334)$$

$$A_{Schlauch} = \frac{\pi}{4} \left( (e(y))^2 - (l(y))^2 \right) + b(y) \cdot (e(y) - l(y)) \quad (335)$$

Unter der Annahme, dass die NF immer genau in der Mitte zwischen äußerer und innerer Schlauchwand verläuft, lässt sich deren Umfang wie folgt berechnen:

$$U_{NF} = \frac{\pi}{2} \cdot (e(y) + l(y)) + 2b(y) \quad (336)$$

Die vertikale lichte Höhe  $l(y)$  und die Breite der Anlagefläche  $b(y)$  sind zunächst unbekannt.

Für den Fall, dass bei  $y_0 = 0$  der Stößel den Schlauch gerade berührt aber nicht verformt, berechnet sich der vertikale Abstand zwischen Stößel und Deckel mit:

$$e(y) = d_a - y \quad (337)$$

Zusätzlich lassen sich  $A_{Lumen}$  und  $U_{NF}$  für den konkreten Fall des unverformten Schlauches ( $y_0 = 0$ ) berechnen:

$$A_{Schlauch} = \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) \quad (338)$$

$$U_{NF} = \frac{\pi}{2} (d_a + d_i) \quad (339)$$

Unter der Annahme, dass sich weder die Querschnittsfläche des Schlauchmaterials noch die Länge der neutralen Faser beim Zusammendrücken des Schlauches ändern ( $A_{Schlauch} = \text{konstant}$ ,  $U_{NF} = \text{konstant}$ ), lassen sich  $l(y)$  und  $b(y)$  aus ( 335 ) bis ( 339 ) berechnen.

Mit der Bedingung  $U_{NF} = \text{konstant}$  folgt aus ( 336 ), ( 337 ) und ( 339 ):

$$b(y) = \frac{\pi}{4} (y + d_i - l(y)) \quad (340)$$

Mit der Bedingung  $A_{Schlauch} = \text{konstant}$  folgt aus ( 335 ), ( 337 ), ( 338 ) und ( 340 )

$$l(y) = d_i - y \quad (341)$$

Anschließend lässt sich noch  $b(y)$  aus ( 340 ) und ( 341 ) berechnen:

$$b(y) = \frac{\pi}{2} y \quad (342)$$

Anhand der Formel ( 341 ) für  $l(y)$  wird deutlich, dass sich die Wandstärke des Schlauches nicht ändert und somit vernachlässigt werden kann.

Nach Einsetzen von ( 341 ) und ( 342 ) in ( 334 ) lässt sich die Fläche des Lumen in Abhängigkeit des Schlauchinnendurchmessers  $d_i$  und des Stößelweges  $y$  berechnen:

$$A_{Lumen} = \frac{\pi}{4} (d_i^2 - y^2) \quad (343)$$

Gemäß ( 332 ) gilt dann für das Kammervolumen

$$V_{Kammer} = \frac{\pi}{4} (d_i^2 - y^2) \cdot L_{Stößel} \quad (344)$$

**A12 Berechnung  $C_1$  von Kammer 5**

Kammer 5 ist am weitesten geöffnet bei:

$$f_4(x) = (1 - s_3) \cdot q_1 - \frac{s_3}{2} + C_1$$

(vgl. Abbildung 20 und ( 322 ), A9)

Da der Arbeitshub dieser Kammer auf 90 % des möglichen Stößelhubs (Schlauchinnendurchmesser) begrenzt ist, folgt aus ( 25 ) (Kapitel 4.2.2):

$$h(x) = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \cdot \left((1 - s_3) \cdot q_1 - \frac{s_3}{2} + C_1\right)\right)} = 0,9 \quad (345)$$

Nach Einsetzen von  $q_1$  gemäß ( 5 ) (Kapitel 4.1.2) folgt:

$$h(x) = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \cdot \left(\frac{s_2}{2} + 1 + C_1\right)\right)} = 0,9 \quad (346)$$

und

$$C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1 \quad (347)$$

### A13 Stößelhubberechnung für das Beispiel in Kapitel 4.2.3

Im Folgenden ist die Berechnung der Stößelbewegungen der Kammern 1 bis 5 dargestellt. Dazu werden die zur Beschreibung des in der Kammer enthaltenen Volumens genutzten TUF  $f_i(x)$  als  $V_i(t)$  in die Formel ( 25 )

$$h_i(t) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_K} \cdot V_i(t)}$$

eingesetzt. Die Stößelbewegungen für den Arbeitszyklus einer Kammer werden durch die resultierenden TUF  $h_i(x)$  beschrieben.

Für das Auslegungsbeispiel der Pumpe werden die Parameter gemäß Kapitel 4.2.3 eingesetzt:

$$s_2 = 0,14; s_3 = 0,5; \xi = 1,3; L_1 = L_2 = L_4 = L_5 = 0,99; L_3 = 2,97$$

Nach Einsetzen der für  $s_2$  und  $s_3$  gewählten Werte in ( 5 ) und ( 6 ) folgt für:

$$q_1 = \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} = 2,64$$

und

$$q_2 = \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} = 2,36$$

Für  $C_1$  gilt gemäß ( 28 )

$$C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$$

#### Stößelbewegung Kammer 1

**Kammer 1  $h_1(x)$ :**

gemäß ( 238 ) A9 ist:

$$f_1(x) = x + C_1 = x + 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left(x + 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1\right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\left(0,01 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left(x - \frac{s_2}{2} - 1\right)\right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\left(-\frac{1}{\xi \cdot L_1} x + \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left(\frac{s_2 + 2}{2}\right) + 0,01\right)}$$

aus  $L_1 = 0,99; \xi = 1,3; s_2 = 0,14$  folgt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\left(-\frac{1}{0,99 \cdot 1,3}x + \frac{1}{0,99 \cdot 1,3} \cdot \left(\frac{0,14 + 2}{2}\right) + 0,01\right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\left(-\frac{1000}{1287}x + \frac{1000}{1287} \cdot \frac{107}{100} + \frac{1}{100}\right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\left(-\frac{1000}{1287}x + \frac{1000}{1287} \cdot \frac{107}{100} + \frac{1287}{100 \cdot 1287}\right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\left(-\frac{1000}{1287}x + \frac{108287}{128700}\right)}$$


---

**Kammer 1  $h_2(x)$ :**

gemäß ( 241 ) A9 ist:

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x\right) + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt und mit  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$  ergibt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left(s_2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x\right) + 1 + 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1\right)}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left(s_2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x\right) - \frac{s_2}{2}\right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $L_1 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{0,99 \cdot 1,3} \cdot \left(0,14 \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x\right) - \frac{0,14}{2}\right)}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \cdot \left(\frac{7}{100}x^4 - \frac{14}{100}x^3 + \frac{14}{100}x - \frac{7}{100}\right)}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{-\frac{70}{1287}x^4 + \frac{140}{1287}x^3 - \frac{140}{1287}x + \frac{70}{1287} + \frac{1}{100}}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{-\frac{70}{1287}x^4 + \frac{140}{1287}x^3 - \frac{140}{1287}x + \frac{8287}{128700}}$$


---

**Kammer 1  $h_3(x)$ :**

gemäß ( 244 ) A9 ist:

$$f_3(x) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt und mit  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$  ergibt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( \frac{s_2}{2} + 1 + 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{0,01}$$

$$\underline{h_3(x) = 0,9}$$

**Kammer 1  $h_4(x)$ :**

gemäß ( 247 ) A9 ist:

$$f_4(x) = -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt und mit  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$  ergibt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_1 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{0,99 \cdot 1,3} \cdot \left( -0,5 \cdot \frac{0,5 + 0,14 + 2}{1} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right)}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \cdot \left( -\frac{132}{100} \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right)}$$

$$\underline{h_4(x) = 1 - \sqrt{-\frac{660}{1287}x^4 + \frac{1320}{1287}x^3 + \frac{1}{100}}}$$

**Kammer 1  $h_5(x)$ :**Bei  $s_3 = 0,5$  hat  $f_5(x)$  die Ausdehnung 0 (vgl. Abbildung 20). Der Vollständigkeit halber erfolgt an dieser Stelle dennoch die Berechnung:

gemäß ( 250 ) A9 ist:

$$f_5(x) = -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot (1-2s_3) \cdot x - s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{4(1-s_3)} + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt und mit  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$  ergibt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot (1-2s_3) \cdot x - s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{4(1-s_3)} + \frac{s_2}{2} + 1 + 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( -\frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot (1-2s_3) \cdot x - s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{4(1-s_3)} \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_1 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{1,3 \cdot 0,99} \cdot \left( -0,5 \cdot \frac{0,5 + 0,14 + 2}{4(1-0,5)} \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \cdot \left( -\frac{264}{400} \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{\frac{67287}{128700}}$$

**Kammer 1  $h_6(x)$ :**

gemäß ( 253 ) A9 ist:

$$f_6(x) = \frac{s_3 s_2 - s_3^2 + 4s_3}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) - \frac{s_3^2 + s_3 s_2 + 2s_3}{2(1-s_3)} \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3 s_2}{4(1-s_3)} + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( \frac{s_3 s_2 - s_3^2 + 4s_3}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) - \frac{s_3^2 + s_3 s_2 + 2s_3}{2(1-s_3)} \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3 s_2}{4(1-s_3)} + C_1 \right)}$$

mit  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_1 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{\xi \cdot L_1} \cdot \left( \frac{s_3 s_2 - s_3^2 + 4s_3}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) - \frac{s_3^2 + s_3 s_2 + 2s_3}{2(1-s_3)} \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3 s_2}{4(1-s_3)} - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_1 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \cdot \left( \frac{182}{100} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) - \frac{132}{100} \cdot x + \frac{41}{100} - \frac{7}{100} - 1 \right)}$$

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} + \left( -\frac{1820}{1287} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{1320}{1287} x + \frac{660}{1287} \right)}$$

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{910}{1287}x^4 - \frac{1820}{1287}x^3 + \frac{1320}{1287}x + \frac{67287}{128700}}$$

### Stößelbewegung Kammer 2

Kammer 2 bleibt während der Phase I dicht verschlossen, so dass  $f_1(x) = 0$  gilt (vgl. Abbildung 20)

**Kammer 2  $h_1(x)$ :**

$$\underline{f_1(x) = h_1(x) = 0}$$

**Kammer 2  $h_2(x)$ :**

gemäß ( 259 ) A9 ist:

$$f_2(x) = s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right)$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_2} \left( s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $L_2 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{14}{100} \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right)}$$

$$\underline{h_2(x) = 1 - \sqrt{\frac{70}{1287}x^4 - \frac{140}{1287}x^3 + 1}}$$

**Kammer 2  $h_3(x)$ :**

gemäß ( 262 ) A9 ist:

$$f_3(x) = (1 - s_2) \cdot x + \frac{s_2}{2}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_2} \left( (1 - s_2) \cdot x + \frac{s_2}{2} \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $L_2 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:



$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \left( \frac{100 - 14}{100} \right) \cdot x + \frac{7}{100} \right)}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{-\frac{860}{1287}x - \frac{70}{1287} + 1}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{-\frac{860}{1287}x + \frac{1217}{1287}}$$

**Kammer 2  $h_4(x)$ :**

gemäß ( 265 ) A9 ist:

$$f_4(x) = s_3 \cdot \left( -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + x \right) - \frac{s_2}{2} + 1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_2} \left( s_3 \cdot \left( -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + x \right) - \frac{s_2}{2} + 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_2 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{336}{100} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + x \right) - \frac{7}{100} + 1 \right)}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{84}{100}x^4 - \frac{168}{100}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{93}{100} \right)}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{-\frac{840}{1287}x^4 + \frac{1680}{1287}x^3 - \frac{500}{1287}x + \frac{357}{1287}}$$

**Kammer 2  $h_5(x)$ :**

Bei  $s_3 = 0,5$  hat  $f_5(x)$  die Ausdehnung 0 (vgl. Abbildung 20). Der Vollständigkeit halber erfolgt an dieser Stelle dennoch die Berechnung:

gemäß ( 268 ) A9 ist:

$$f_5(x) = -\frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (1 - 2s_3) \cdot x + s_3 \cdot \frac{s_2 - 3s_3}{4(1 - s_3)} - \frac{s_2}{2} + 1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_2} \left( -\frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot (1 - 2s_3) \cdot x + s_3 \cdot \frac{s_2 - 3s_3}{4(1 - s_3)} - \frac{s_2}{2} + 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_2 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{136}{200} \right) - \frac{7}{100} + 1 \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{59}{100} \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{\frac{697}{1287}}$$

**Kammer 2  $h_6(x)$ :**

gemäß ( 271 ) A9 ist:

$$f_6(x) = s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{s_3^2 - s_3s_2 + 2s_3}{4(1 - s_3)}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_2} \left( s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{s_3^2 - s_3s_2 + 2s_3}{4(1 - s_3)} \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_2 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{118}{100} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{59}{100} \right)}$$

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 + \frac{590}{1287}x^4 - \frac{1180}{1287}x^3 + \frac{1180}{1287}x - \frac{590}{1287}}$$

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{590}{1287}x^4 - \frac{1180}{1287}x^3 + \frac{1180}{1287}x + \frac{697}{1287}}$$

**Stößelbewegung Kammer 3**

Kammer 3 bleibt während der Phase II dicht verschlossen, so dass  $f_4(x) = 0$  gilt (vgl. Abbildung 20).

**Kammer 3  $h_1$ :**

gemäß ( 274 ) A9 ist:

$$f_1(x) = -\frac{3s_3}{1 - s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + 3$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_3} \left( -\frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + 3 \right)}$$

aus  $s_3 = 0,5$ ;  $L_3 = 2,97$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{3861} \left( -3 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + 3 \right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1500}{3861}x^4 + \frac{3000}{3861}x^3 - \frac{3000}{3861}}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{-\frac{1500}{3861}x^4 + \frac{3000}{3861}x^3 + \frac{861}{3861}}$$

### Kammer 3 $h_2$ :

Bei  $s_3 = 0,5$  hat  $f_2(x)$  die Ausdehnung 0 (vgl. Abbildung 20). Der Vollständigkeit halber erfolgt an dieser Stelle dennoch die Berechnung.

gemäß ( 277 ) A9 ist:

$$f_2(x) = -3 \frac{1-2s_3}{1-s_3} \cdot x + \frac{6-9s_3}{2(1-s_3)}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_3} \left( -3 \frac{1-2s_3}{1-s_3} \cdot x + \frac{6-9s_3}{2(1-s_3)} \right)}$$

aus  $s_3 = 0,5$ ;  $L_3 = 2,97$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{3861} \left( (0) \cdot x + \frac{3}{2} \right)}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{3000}{7722}} = 1 - \sqrt{\frac{4722}{7722}}$$

### Kammer 3 $h_3$ :

gemäß ( 280 ) A9 ist:

$$f_3(x) = \frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{3s_3}{2(1-s_3)}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_3} \left( \frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{3s_3}{2(1-s_3)} \right)}$$

aus  $s_3 = 0,5$ ;  $L_3 = 2,97$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{3861} \left( 3 \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 - x \right) + \frac{15}{10} \right)}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 + \frac{1500}{3861} x^4 - \frac{3000}{3861} x^3 + \frac{3000}{3861} x - \frac{1500}{3861}}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{\frac{1500}{3861} x^4 - \frac{3000}{3861} x^3 + \frac{3000}{3861} x + \frac{2361}{3861}}$$

**Kammer 3  $h_4$ :**

Die Kammer bleibt geschlossen, so dass gilt:

$$\underline{f_4(x) = h_4(x) = 0}$$

**Kammer 3  $h_5$ :**

gemäß ( 286 ) A9 ist:

$$f_5(x) = \frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right)$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_3} \left( \frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \right)}$$

aus  $s_3 = 0,5$ ;  $L_3 = 2,97$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{3861} \left( 3 \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{3000}{3861} x^3 + \frac{1500}{3861} x^4}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{\frac{1500}{3861} x^4 - \frac{3000}{3861} x^3 + 1}$$

**Kammer 3  $h_6$ :**

Bei  $s_3 = 0,5$  hat  $f_2(x)$  die Ausdehnung 0 (vgl. Abbildung 20). Der Vollständigkeit halber erfolgt an dieser Stelle dennoch die Berechnung.

gemäß ( 289 ) A9 ist:

$$f_6(x) = 3 \frac{1-2s_3}{1-s_3} \cdot x + \frac{3}{2} \frac{s_3}{(1-s_3)}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_3} \left( 3 \frac{1-2s_3}{1-s_3} \cdot x + \frac{3}{2} \frac{s_3}{(1-s_3)} \right)}$$

aus  $s_3 = 0,5$ ;  $L_3 = 2,97$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{3861} \left( (0) \cdot x + \frac{3}{2} \right)}$$

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{3000}{7722}} = 1 - \sqrt{\frac{4722}{7722}}$$

### **Kammer 3 $h_7$ :**

gemäß ( 292 ) A9 ist:

$$f_7(x) = -\frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \left( 1 - \frac{3}{2}s_3 \right) \cdot \frac{3}{1-s_3}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_7(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_3} \left( -\frac{3s_3}{1-s_3} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \left( 1 - \frac{3}{2}s_3 \right) \cdot \frac{3}{1-s_3} \right)}$$

aus  $s_3 = 0,5$ ;  $L_3 = 2,97$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_7(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{3861} \left( -3 \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x \right) + \frac{3}{2} \right)}$$

$$h_7(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1500}{3861}x^4 + \frac{3000}{3861}x^3 - \frac{3000}{3861}x - \frac{1500}{3861}}$$

$$h_7(x) = 1 - \sqrt{-\frac{1500}{3861}x^4 + \frac{3000}{3861}x^3 - \frac{3000}{3861}x + \frac{2361}{3861}}$$

### Stößelbewegung Kammer 4

#### **Kammer 4 $h_1(x)$ :**

gemäß ( 295 ) A9 ist:

$$f_1(x) = s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right)$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_4} \left( s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1-s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_4 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{118}{100} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\frac{590}{1287} x^4 - \frac{1180}{1287} x^3 + 1}$$

**Kammer 4  $h_2(x)$ :**

Bei  $s_3 = 0,5$  hat  $f_2(x)$  die Ausdehnung 0 (vgl. Abbildung 20). Der Vollständigkeit halber erfolgt an dieser Stelle dennoch die Berechnung.

gemäß ( 298 ) A9 ist:

$$f_2(x) = \frac{1 - 2s_3}{2(1 - s_3)} \cdot (s_3 - s_2 + 2) \cdot x + s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{4(1 - s_3)}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_4} \left( \frac{1 - 2s_3}{2(1 - s_3)} \cdot (s_3 - s_2 + 2) \cdot x + s_3 \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{4(1 - s_3)} \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_4 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( (0) \cdot x + \frac{59}{100} \right)}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{590}{1287}} = 1 - \sqrt{\frac{697}{1287}}$$

**Kammer 4  $h_3(x)$ :**

gemäß ( 301 ) A9 ist:

$$f_3(x) = s_3 \cdot \left( -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot x \right) + \left( 1 - \frac{3}{2} s_3 \right) \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)}$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_4} \left( s_3 \cdot \left( -\frac{4 - s_2 - s_3}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot x \right) + \left( 1 - \frac{3}{2} s_3 \right) \cdot \frac{s_3 - s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_4 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{336}{100} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{236}{100} \cdot x \right) + \frac{59}{100} \right)}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{\frac{840}{1287} x^4 + \frac{1680}{1287} x^3 - \frac{1180}{1287} x + \frac{697}{1287}}$$

**Kammer 4  $h_4(x)$ :**

gemäß ( 304 ) A9 ist:

$$f_4(x) = (s_2 - 1) \cdot x - \frac{s_2}{2} + 1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_4} \left( (s_2 - 1) \cdot x - \frac{s_2}{2} + 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_4 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1000}{1287} \left( -\frac{86}{100}x + \frac{93}{100} \right)}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{\frac{860}{1287}x + \frac{357}{1287}}$$

**Kammer 4  $h_5(x)$ :**

gemäß ( 307 ) A9 ist:

$$f_5(x) = s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{2} \right)$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_4} \left( s_2 \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{2} \right) \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $L_4 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{\frac{70}{1287}x^4 - \frac{140}{1287}x^3 + \frac{140}{1287}x + \frac{1217}{1287}}$$

**Kammer 4  $h_6(x)$ :**

Die Kammer bleibt geschlossen, so dass gilt:

$$\underline{f_6(x) = h_6(x) = 0}$$

Stößelbewegung Kammer 5Gemäß ( 347 ) ist für Kammer 5  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$ **Kammer 5  $h_1(x)$ :**

gemäß ( 313 ) A9 ist:

$$f_1(x) = s_3 \cdot \left( \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - x \right) + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( s_3 \cdot \left( \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1 - s_3)} \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - x \right) + C_1 \right)}$$

aus  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( s_3 \cdot \left( \left( \frac{s_2 - s_3 + 4}{2(1 - s_3)} \right) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - x \right) + 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_5 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{364}{100} \right) \cdot \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) - x \right) - \frac{7}{100} - 1}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \left( \frac{182}{100}x^3 - \frac{91}{100}x^4 - \frac{1}{2}x - \frac{107}{100} \right)}$$

$$h_1(x) = 1 - \sqrt{\frac{910}{1287}x^4 - \frac{1820}{1287}x^3 + \frac{500}{1287}x + \frac{108287}{128700}}$$

**Kammer 5  $h_2(x)$ :**

Bei  $s_3 = 0,5$  hat  $f_2(x)$  die Ausdehnung 0 (vgl. Abbildung 20). Der Vollständigkeit halber erfolgt an dieser Stelle dennoch die Berechnung.

gemäß ( 316 ) A9 ist:

$$f_2(x) = \frac{1 - 2s_3}{2 - 2s_3} \cdot (s_3 + s_2 + 2) \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3s_2}{4(1 - s_3)} + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( \frac{1 - 2s_3}{2 - 2s_3} \cdot (s_3 + s_2 + 2) \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3s_2}{4(1 - s_3)} + C_1 \right)}$$

aus  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( \frac{1 - 2s_3}{2 - 2s_3} \cdot (s_3 + s_2 + 2) \cdot x + \frac{3s_3^2 + s_3s_2}{4(1 - s_3)} + 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_5 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \left( (0) \cdot x - \frac{66}{100} \right)}$$

$$h_2(x) = 1 - \sqrt{\frac{67287}{128700}}$$



**Kammer 5  $h_3(x)$ :**

gemäß ( 319 ) A9 ist:

$$f_3(x) = -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + \frac{2s_2 + 4 - 3s_3s_2 - 6s_3 - s_3^2}{4(1 - s_3)} + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + \frac{2s_2 + 4 - 3s_3s_2 - 6s_3 - s_3^2}{4(1 - s_3)} + C_1 \right)}$$

aus  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( -s_3 \cdot \frac{s_3 + s_2 + 2}{2(1 - s_3)} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) + \frac{2s_2 + 4 - 3s_3s_2 - 6s_3 - s_3^2}{4(1 - s_3)} - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $s_3 = 0,5$ ;  $L_5 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \left( -\frac{132}{100} \cdot \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4 - x\right) - \frac{66}{100} \right)}$$

$$h_3(x) = 1 - \sqrt{-\frac{660}{1287}x^4 + \frac{1320}{1287}x^3 - \frac{1320}{1287}x + \frac{67287}{128700}}$$

**Kammer 5  $h_4(x)$ :**

gemäß ( 322 ) A9 ist:

$$f_4(x) = \frac{s_2}{2} + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \right)}$$

aus  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( \frac{s_2}{2} + 1 + 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1 \right)}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{1 - 0,99}$$

$$h_4(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100}}$$

**Kammer 5  $h_5(x)$ :**

gemäß ( 325 ) A9 ist:

$$f_5(x) = -s_2 \left( x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( -s_2 \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) + \frac{s_2}{2} + 1 + C_1 \right)}$$

aus  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{0,01 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( -s_2 \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $L_5 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \left( -\frac{14}{100} \left( x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \right)}$$

$$h_5(x) = 1 - \sqrt{-\frac{70}{1287} x^4 + \frac{140}{1287} x^3 + \frac{1}{100}}$$

**Kammer 5  $h_6(x)$ :**

gemäß ( 328 ) A9 ist:

$$f_6(x) = x + 1 + C_1$$

als  $V(t)$  in ( 25 ) eingesetzt ergibt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi \cdot L_5} (-x + 1 + C_1)}$$

aus  $C_1 = 0,99 \cdot \xi \cdot L_5 - \frac{s_2}{2} - 1$  folgt

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1}{\xi \cdot L_5} \left( -x - \frac{s_2}{2} \right)}$$

aus  $s_2 = 0,14$ ;  $L_5 = 0,99$  und  $\xi = 1,3$  folgt:

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{1000}{1287} \left( -x - \frac{7}{100} \right)}$$

$$h_6(x) = 1 - \sqrt{\frac{1000}{1287} x + \frac{8287}{128700}}$$

## A14 Fehler der Verdrängungsmessung in Folge des Auftriebs

Im Folgenden wird die Abschätzung der Auftriebskraft vorgenommen, welche auf eine in das fluidgefüllte Becherglas ragende Kapillare wirkt. Da die Kapillare mit dem Gehäuse der Feinwaage verbunden ist, „stößt“ sich das Becherglas in Folge der Auftriebskraft von der Kapillare ab, was dazu führt, dass die Auftriebskraft von der Feinwaage mit gemessen und dadurch das von der Feinwaage angezeigte Gewicht verfälscht wird.

Die Auftriebskraft  $F_A$  berechnet sich wie folgt:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V$$

$\rho$  – Fluiddichte in  $\text{kg}/\text{m}^3$

$g$  – Erdbeschleunigung  $\approx 9,8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

$V$  – verdrängtes Fluidvolumen

Das verdrängte Fluidvolumen berechnet sich aus dem Außendurchmesser  $d_{\text{Kapillare}}$  der Kapillare und der in das Fluid ragenden Länge  $l_{\text{Kapillare}}$  zu:

$$V = \frac{\pi}{4} d_{\text{Kapillare}}^2 \cdot l_{\text{Kapillare}}$$

Im Verlauf der Messung steigt der Flüssigkeitsspiegel im Becherglas durch das aus dem Schlauch verdrängte Volumen an, so dass gilt:

$$\frac{\pi}{4} d_{\text{Glas}}^2 \cdot \Delta h_{\text{Glas}} = V_{\text{Schlauch}}$$

$d_{\text{Glas}}$  – Innenquerschnitt Becherglas

$\Delta h_{\text{Glas}}$  – Änderung Flüssigkeitsspiegel im Becherglas

$\Delta V_{\text{Schlauch}}$  – aus dem Schlauch verdrängtes Fluidvolumen

Es gilt  $\Delta l = \Delta h$ , so dass folgt:

$$\Delta F_A = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{\pi}{4} d_a^2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{d_{\text{Glas}}^2} \cdot \Delta V_{\text{Schlauch}} \right)$$

Da von der Feinwaage nicht direkt das Volumen, sondern die verdrängte Masse  $m_{\text{Schlauch}}$  gemessen wird, folgt:

$$\Delta F_A = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{d_{\text{Kapillare}}^2}{d_{\text{Glas}}^2} \cdot \frac{\Delta m_{\text{Schlauch}}}{\rho} \right)$$

$$\Delta F_A = g \cdot \frac{d_{\text{Kapillare}}^2}{d_{\text{Glas}}^2} \cdot \Delta m_{\text{Schlauch}}$$

Die durch die Auftriebskraft von der Waage zusätzlich detektierte Masse  $m_{\text{Auftrieb}}$  berechnet sich demnach wie folgt:

$$\Delta m_{\text{Auftrieb}} = \frac{d_{\text{Kapillare}}^2}{d_{\text{Glas}}^2} \cdot \Delta m_{\text{Schlauch}}$$

Mit den im Messaufbau verwendeten Parametern  $d_{\text{Kap}} = 1,6 \text{ mm}$ ,  $d_{\text{Glas}} = 23,5 \text{ mm}$  ergibt sich in Folge des Auftriebs ein Messfehler von:

$$\Delta m_{\text{Auftrieb}} \approx 0,005 \cdot \Delta m_{\text{Schlauch}}.$$

## A15 Zur Kurvenscheibenberechnung genutzte Formeln

Die folgenden Definitionen und Formeln sind der Quelle (Volmer 1995, pp. 165–175) entnommen.

### Grundkreisradius

Durch den Grundkreisradius  $r_G$  wird der maximale Außenradius der Kurvenscheibe vorgegeben.

### Führungskurve

Die Führungskurve wird auch als Rollenmittelpunktbahn bezeichnet. Sie ist die Bahn, auf der sich der Rollenmittelpunkt  $B$  des Eingriffsgliedes bewegt. Im Fall der Pumpe ist das Eingriffsglied die Stößelgruppe, welche die Kurvenscheibe über ein Kugellager abgreift. Da der Kurvenscheibendrehpunkt  $A_0$  auf der Stößelachse liegt, lässt sich die Führungskurve in Abhängigkeit vom Drehwinkel  $\varphi$  der Kurvenscheibe über den Radius  $r_{FK}$  in Polarkoordinaten ausdrücken:

$$r_{FK}(\varphi) = r_G - s_B(\varphi) \quad (348)$$

Der Koordinatenursprung befindet sich im Drehpunkt  $A_0$  der Kurvenscheibe.

Die lineare Bewegung des Eingriffsgliedes  $s_B(\varphi)$  ist der gemessene Bewegungsverlauf der Trapeze (tatsächliche Stößelbewegung) bezogen auf eine vollständige Umdrehung der Kurvenscheibe mit  $\varphi = 360^\circ$ . Beginnend bei  $\varphi = 0^\circ$  werden dazu die 90 Stützstellen mit einer Schrittweite von  $\Delta\varphi = 4^\circ$  dem Drehwinkel der Kurvenscheibe zugeordnet.

Für die anschließende Berechnung der Arbeitskurve wird die Bewegung des Rollenmittelpunktes  $B$  in kartesische Koordinaten benötigt:

$$x_B = (r_G - s_B(\varphi)) \cdot \cos \varphi \quad (349)$$

$$y_B = (r_G - s_B(\varphi)) \cdot \sin \varphi$$

### Arbeitskurve

Die Arbeitskurve (auch Kurvenflanke) ist die äußere Kontur der Kurvenscheibe, auf welcher die Rolle (Kugellager) des Eingriffsgliedes (Stößel) abrollt. Sie ist die Äquidistante zur Führungskurve im Abstand des Rollenradius und lässt sich aus der Führungskurve wie folgt berechnen:

$$x_A = x_B - r_R \cdot \cos \gamma \quad (350)$$

$$y_A = y_B - r_R \cdot \sin \gamma$$

Der Winkel  $\gamma$  folgt aus dem Anstiegswinkel der Tangente an die Führungskurve und berechnet sich bei  $x'_B < 0$  zu

$$\gamma = 450^\circ + \arctan\left(\frac{y'_B}{x'_B}\right) \quad (351)$$

beziehungsweise bei  $x'_B > 0$  zu

$$\gamma = 630^\circ + \arctan\left(\frac{y'_B}{x'_B}\right) \quad (352)$$

### Kritischer Rollenradius

Der Rollenradius  $r_R$  des Eingriffsgliedes muss stets kleiner sein als der kleinste Krümmungsradius  $\varrho_B$  des konvex gekrümmten Kurvenflankenverlaufes der Führungskurve. Ist  $r_R > \min \varrho_B$ , kommt es zu einem Unterschnitt. In diesem Fall ist der Radius der Arbeitskurve an der betreffenden Stelle geringer als zum Einhalten der berechneten Führungskurve erforderlich, und die Übertragungsfunktion  $s_B$  wird an dieser Stelle nicht realisiert.

Im Fall  $r_R = \min \varrho_B$  wird die Übertragungsfunktion  $s_B$  zwar gerade noch realisiert, allerdings tritt dann an dieser Stelle eine „Spitze“ in der Arbeitskurve auf, was zu einem erhöhten Verschleiß infolge großer Flächenpressung führen kann. Für die Auslegung der Kurvenscheibe wird daher  $r_R \leq 0,7 \min \varrho_B$  empfohlen (Volmer 1995).

Wird bei der Berechnung eine Überschreitung des kritischen Radius  $\min \varrho_B$  festgestellt, muss entweder der Rollenradius  $r_R$  verringert oder der Grundkreisradius  $r_G$  vergrößert werden.

Der Krümmungsradius  $\varrho_B$  wird wie folgt berechnet:

$$\varrho_B = \frac{\sqrt{(x_B'^2 + y_B'^2)^3}}{x_B' \cdot y_B'' - y_B' \cdot x_B''} \quad (353)$$

Für  $\varrho_B > 0$  besitzt der Arbeitskurvenabschnitt eine konvexe Krümmung und für  $\varrho_B < 0$  entsprechend eine konkave Krümmung.